

非線形波動方程式の古典解の大域存在と爆発

太田 雅人 (埼玉大学理学部)

§1. 波動方程式

$$(1) \quad \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0$$

を波動方程式という. ここで, $c > 0$ は定数, $u = u(x, t)$ は $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ と $t \in \mathbb{R}$ を独立変数とする実数値関数である. また

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2.$$

波動方程式は様々な物理現象を記述するモデルとして現れる. 例えば

- $n = 1$ のとき: 弦の微小振動 (弦楽器),
- $n = 2$ のとき: 膜の微小振動 (太鼓),
- $n = 3$ のとき: 空気の微小振動 (音波), 電磁波 (Maxwell 方程式).

これらの物理現象から波動方程式を導くことについては, 例えば, 金子 [7] を参照せよ. 数学の問題としては, まず, 初期データ (φ, ψ) が与えられたとき

$$(2) \quad \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty),$$

$$(3) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

の解 u を求めることが重要である. $n = 1$ の場合, 初期値問題 (2)-(3) の解を簡単に求めることができる.

定理 1 $n = 1, k \geq 2, F, G \in C^k(\mathbb{R})$ とする. このとき

$$(4) \quad u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

とおくと, $u \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ であり, u は (2) をみたす.

島根大学総合理工学部における集中講義 (2003 年 6 月 23 日 ~ 6 月 27 日) に基づく
Email: mohta@mail.saitama-u.ac.jp

定理 1 は直接計算すれば確かめられる. $F(x+ct)$ は速さ c で左に進む波を, $G(x-ct)$ は速さ c で右に進む波を表す. そこで, c を伝播速度という. (4) が初期条件 (3) をみたすように (F, G) を決めれば次を得る.

定理 2 $n = 1, k \geq 2, (\varphi, \psi) \in C^k(\mathbb{R}) \times C^{k-1}(\mathbb{R})$ とする. このとき

$$(5) \quad u(x, t) = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$$

とおくと, $u \in C^k(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ であり, u は (2)-(3) をみたす.

(5) を d'Alembert の公式という. $n = 2, 3$ の場合の解の公式については後で述べる. $n \geq 4$ の場合は, クーラン・ヒルベルト [2] を参照せよ.

$D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ とするとき, $u \in C^2(D)$ であり, $\forall (x, t) \in D$ に対して, u が方程式 (1) をみたすとき, u を D における古典解という. 後で, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, 初期値問題 (2)-(3) の古典解の一意性, すなわち, 初期データ (φ, ψ) が与えられたとき, (2)-(3) の古典解は高々 1 つであることを証明する. よって, $n = 1$ のとき, $(\varphi, \psi) \in C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$ ならば, 初期値問題 (2)-(3) の古典解は一意的に存在して, それは d'Alembert の公式 (5) で与えられることが分る.

問 3 $v = v(x, t)$ を

$$(6) \quad \begin{cases} \partial_t^2 v - c^2 \Delta v = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ v(x, 0) = 0, \partial_t v(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の滑らかな解とする. このとき, $u = \partial_t v$ は

$$u(x, 0) = \varphi(x), \partial_t u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

をみたす (2) の古典解である.

次に, 非斉次方程式

$$(7) \quad \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T)$$

について考える.

定理 4 (Duhamel の原理) $T > 0, f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T))$ とする. $v = v(x, r, s)$ を

$$\begin{cases} \partial_r^2 v - c^2 \Delta_x v = 0, & (x, r, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, T) \times [0, T), \\ v(x, 0, s) = 0, \partial_r v(x, 0, s) = f(x, s), & (x, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, T) \end{cases}$$

の古典解とする. このとき

$$(8) \quad u(x, t) = \int_0^t v(x, t-s, s) ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$$

とおくと, u は $u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$) をみたす (7) の古典解である.

証明 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ に対して

$$(9) \quad \partial_t u(x, t) = v(x, 0, t) + \int_0^t \partial_r v(x, t-s, s) ds = \int_0^t \partial_r v(x, t-s, s) ds,$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x, t) &= \partial_r v(x, 0, t) + \int_0^t \partial_r^2 v(x, t-s, s) ds \\ &= f(x, t) + c^2 \int_0^t \Delta_x v(x, t-s, s) ds, \end{aligned}$$

$$\Delta u(x, t) = \int_0^t \Delta_x v(x, t-s, s) ds$$

だから, u は (7) をみたす. また, $\int_0^0$ (被積分関数) $ds = 0$ だから, (8), (9) より, $u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$) が成り立つ. $\square$

問3と定理4から, 特別な初期値問題 (6) の解の公式が求まれば, 一般の非斉次初期値問題 (7)-(3) の解の公式が得られることが分る. 定理2と定理4から次が分る.

定理5 $n = 1$, $(\varphi, \psi) \in C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$, $f, \partial_x f \in C(\mathbb{R} \times [0, T])$ とする. このとき

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy \right) ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T] \end{aligned}$$

とおくと, $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, T])$ で, u は (7)-(3) をみたす.

(9) に関する補足 $0 \leq t \leq T$ に対して, 積分の順序交換をすると

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\int_0^\tau \partial_r v(x, \tau-s, s) ds \right) d\tau &= \int_0^t \left(\int_s^t \partial_r v(x, \tau-s, s) d\tau \right) ds \\ &= \int_0^t \left\{ \int_s^t \frac{\partial}{\partial \tau} v(x, \tau-s, s) d\tau \right\} ds = \int_0^t \{v(x, t-s, s) - v(x, 0, s)\} ds. \end{aligned}$$

これを t に関して微分すれば, (9) のはじめの等式が得られる. $\square$

§2. エネルギー不等式と解の一意性

以下では, 簡単のため, 伝播速度は $c = 1$ とする. また

$$\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n), \quad \partial = (\nabla, \partial_t), \quad \square = \partial_t^2 - \Delta$$

とおく. さらに, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ に対して

$$\Gamma(x_0, t_0) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) : |x - x_0| \leq t_0 - t\}$$

とおく.

定理 1 (エネルギー不等式) $m \geq 0$, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, $f \in C(\Gamma(x_0, t_0))$ とする. また, u を $\square u + mu = f(x, t)$ の $\Gamma(x_0, t_0)$ における古典解とし

$$\epsilon(x, t) = \frac{1}{2} |\partial u(x, t)|^2 + \frac{m}{2} |u(x, t)|^2, \quad E(t) = \int_{|x-x_0| \leq t_0-t} \epsilon(x, t) dx$$

とおく. このとき, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_0$ なる任意の t_1, t_2 に対して

$$(1) \quad E(t_2) \leq E(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{|x-x_0| \leq t_0-t} f(x, t) \partial_t u(x, t) dx dt.$$

証明

$$\Omega = \{(x, t) : |x - x_0| \leq t_0 - t, t_1 \leq t \leq t_2\},$$

$$A(x, t) = (-\partial_t u(x, t) \nabla u(x, t), \epsilon(x, t))$$

に対して, 発散定理

$$\int_{\Omega} \partial \cdot A dx dt = \int_{\partial \Omega} A \cdot \vec{n} d\sigma$$

を用いる. ここで, $\vec{n}$ は Ω の境界 $\partial \Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル場.

$$C := \{(x, t) : |x - x_0| = t_0 - t, t_1 \leq t \leq t_2\},$$

$$D_j := \{(x, t_j) : |x - x_0| \leq t_0 - t_j\}, \quad j = 1, 2$$

とおくと, $\partial \Omega = C \cup D_1 \cup D_2$ で, D_1 上では $\vec{n} = (0, -1)$, D_2 上では $\vec{n} = (0, 1)$, C 上では

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x - x_0}{|x - x_0|}, 1 \right).$$

また, $\partial \cdot A = \partial_t \epsilon - \nabla \cdot (\partial_t u \nabla u) = (\square u + mu) \partial_t u = f \partial_t u$ だから

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{|x-x_0| \leq t_0-t} f(x, t) \partial_t u(x, t) dx dt \\ &= E(t_2) - E(t_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_C \left(\epsilon - \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \cdot \nabla u \partial_t u \right) d\sigma. \end{aligned}$$

ここで

$$\left| \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \cdot \nabla u \partial_t u \right| \leq |\nabla u| |\partial_t u| \leq \frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + |\partial_t u|^2) \leq \epsilon$$

だから (1) を得る. $\square$

定理 2 (解の一意性) $T > 0$, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$, $g \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1})$ とし

$$(2) \quad \begin{cases} \forall M > 0, \exists L > 0 : |x| + |t| + \sum_{j=1,2} (|r_j| + |\vec{q}_j|) \leq M \\ \Rightarrow |g(x, t, r_1, \vec{q}_1) - g(x, t, r_2, \vec{q}_2)| \leq L \{|r_1 - r_2| + |\vec{q}_1 - \vec{q}_2|\} \end{cases}$$

を仮定する. また, u_1, u_2 を

$$(3) \quad \square u = g(x, t, u, \partial u)$$

の $\Gamma(x_0, t_0)$ における古典解とする. このとき

$$(4) \quad u_1(x, 0) = u_2(x, 0), \quad \partial_t u_1(x, 0) = \partial_t u_2(x, 0) \quad \text{for } |x - x_0| \leq t_0$$

ならば, $\forall (x, t) \in \Gamma(x_0, t_0)$, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ が成り立つ.

例 (i) $b_j, c, f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T))$ に対して

$$g(x, t, r, \vec{q}) = \sum_{j=1}^{n+1} b_j(x, t) q_j + c(x, t) r + f(x, t)$$

とおくと, $g \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1})$ で, (2) をみたす.

(ii) $p \geq 1$ のとき, $g(r) = |r|^p$ は (2) をみたす.

定理 2 の証明 $u = u_1 - u_2$ とおくと, u は

$$\square u + u = \tilde{g}(x, t, u, \partial u), \quad (x, t) \in \Gamma(x_0, t_0)$$

をみたす. ここで, $\tilde{g}(x, t, u, \partial u) = u + g(x, t, u_1, \partial u_1) - g(x, t, u_2, \partial u_2)$ とおいた. また, $u_1, u_2 \in C^1(\Gamma(x_0, t_0))$ だから

$$\sup_{(x,t) \in \Gamma(x_0, t_0)} \left\{ |x| + |t| + \sum_{j=1,2} (|u_j(x, t)| + |\partial u_j(x, t)|) \right\} < \infty.$$

よって, (2) より, $\exists C_1 > 0$:

$$|\tilde{g}(x, t, u(x, t), \partial u(x, t))| \leq C_1(|u(x, t)| + |\partial u(x, t)|), \quad \forall (x, t) \in \Gamma(x_0, t_0).$$

ここで

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{|x-x_0| \leq t_0-t} (|\partial u(x, t)|^2 + |u(x, t)|^2) dx$$

とおくと, (4) より $E(0) = 0$. また, 定理 1 より, $\forall t \in [0, t_0]$ に対して

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(0) + \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq t_0-s} \tilde{g}(x, s, u(x, s), \partial u(x, s)) \partial_t u(x, s) dx ds \\ &\leq C_1 \int_0^t \int_{|x-x_0| \leq t_0-s} (|u(x, s)| + |\partial u(x, s)|) |\partial_t u(x, s)| dx ds \leq C_2 \int_0^t E(s) ds. \end{aligned}$$

ここで, $I(t) := \int_0^t E(s) ds$ とおくと, $I'(t) \leq C_2 I(t)$ が成り立つ. これから

$$\{e^{-C_2 t} I(t)\}' = e^{-C_2 t} \{I'(t) - C_2 I(t)\} \leq 0.$$

よって, $\forall t \in [0, t_0]$, $I(t) \leq 0$ が成り立つ. $I(t) \geq 0$ だから, 特に

$$I(t_0) = \frac{1}{2} \iint_{\Gamma(x_0, t_0)} (|\partial u(x, s)|^2 + |u(x, s)|^2) dx ds = 0.$$

よって, $\forall (x, t) \in \Gamma(x_0, t_0)$, $u(x, t) = 0$, すなわち, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ が成り立つ. $\square$

定理 2 から次が分る.

定理 3 (有限伝播性) $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $T > 0$, $R > 0$, $g \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1})$ とし, (2) 及び

$$g(x, t, 0, 0) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T)$$

を仮定する. また, u を $\mathbb{R}^n \times [0, T)$ における (3) の古典解とする. このとき, $u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0$ for $|x - x_0| \geq R$ ならば

$$u(x, t) = 0 \quad \text{for} \quad |x - x_0| \geq t + R, \quad 0 \leq t < T.$$

§3. Kirchhoff の公式

$\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1, 2, \dots\}^n$ に対して, $\nabla^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ とおく. また, $\mathbb{R}^n$ 内の単位球面 $S^{n-1} = \{\omega \in \mathbb{R}^n : |\omega| = 1\}$ 上の積分を

$$\int_{S^{n-1}} g(\omega) dS_\omega \quad \text{または} \quad \int_{|\omega|=1} g(\omega) dS_\omega$$

と表す. 例えば, $S^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ だから

$$\int_{S^1} g(\omega) dS_\omega = \int_0^{2\pi} g(\cos \theta, \sin \theta) d\theta.$$

また, $S^2 = \{(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$ だから

$$\int_{S^2} g(\omega) dS_\omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \sin \phi d\theta d\phi.$$

定理 1 (Kirchhoff の公式) $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ に対して

$$(1) \quad u(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \psi(x + t\omega) dS_\omega, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$$

とおくと, $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ で

$$(2) \quad \square u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty),$$

$$(3) \quad u(x, 0) = 0, \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

をみたす.

証明 $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ であることは, (1) から分る. まず, $|\alpha| \leq 2$ のとき

$$\nabla^\alpha u(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \nabla^\alpha \psi(x + t\omega) dS_\omega.$$

また

$$(4) \quad \partial_t u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \psi(x + t\omega) dS_\omega + \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \omega \cdot \nabla \psi(x + t\omega) dS_\omega.$$

ここで, 発散定理を用いると

$$\begin{aligned} t^2 \int_{|\omega|=1} \omega \cdot \nabla \psi(x + t\omega) dS_\omega &= \int_{|x-y|=t} \frac{y-x}{t} \cdot \nabla \psi(y) dS_y \\ &= \int_{|x-y| \leq t} \Delta \psi(y) dy = \int_0^t \int_{|\omega|=1} \Delta \psi(x + s\omega) s^2 dS_\omega ds. \end{aligned}$$

よって

$$\partial_t u(x, t) = \frac{1}{t} u(x, t) + \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|\leq t} \Delta \psi(y) dy.$$

さらに, $\partial_t^2 u(x, t)$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{t^2} u(x, t) + \frac{1}{t} \partial_t u(x, t) - \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-y|\leq t} \Delta \psi(y) dy + \frac{1}{4\pi t} \partial_t \int_{|x-y|\leq t} \Delta \psi(y) dy \\ &= \frac{1}{4\pi t} \partial_t \int_{|x-y|\leq t} \Delta \psi(y) dy = \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \Delta \psi(x + t\omega) dS_\omega. \end{aligned}$$

よって, u は (2) をみたす. また, (1), (4) から (3) が分かる. $\square$

$(\varphi, \psi) \in C^1(\mathbb{R}^3) \times C(\mathbb{R}^3)$, $f \in C(\mathbb{R}^3 \times [0, T))$ に対して

$$J_3[\psi](x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \psi(x + t\omega) dS_\omega, \quad x \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty),$$

$$K_3[\varphi, \psi](x, t) = J_3[\psi](x, t) + \partial_t J_3[\varphi](x, t), \quad x \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty),$$

$$L_3[f](x, t) = \int_0^t \frac{t-s}{4\pi} \int_{S^2} f(x + (t-s)\omega, s) dS_\omega ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T)$$

とおくと, Kirchhoff の公式と §1 問 3, Duhamel の原理, 解の一意性より, 次が分る.

定理 2 $(\varphi, \psi) \in C^3(\mathbb{R}^3) \times C^2(\mathbb{R}^3)$, $\nabla^\alpha f \in C(\mathbb{R}^3 \times [0, T))$ ($|\alpha| \leq 2$) とすると

$$\begin{cases} \square u = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

の一意的な古典解 $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, T))$ は

$$u(x, t) = K_3[\varphi, \psi](x, t) + L_3[f](x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T)$$

で与えられる.

2次元の解の公式は, 3次元の Kirchhoff の公式から導かれる.

問 3 $S^2 = \{(\xi, \sqrt{1-|\xi|^2}) : \xi \in \mathbb{R}^2, |\xi| \leq 1\} \cup \{(\xi, -\sqrt{1-|\xi|^2}) : \xi \in \mathbb{R}^2, |\xi| \leq 1\}$ を用いて

$$\int_{S^2} g(\omega) dS_\omega = \int_{|\xi|<1} \frac{g(\xi, \sqrt{1-|\xi|^2})}{\sqrt{1-|\xi|^2}} d\xi + \int_{|\xi|<1} \frac{g(\xi, -\sqrt{1-|\xi|^2})}{\sqrt{1-|\xi|^2}} d\xi$$

を示せ. また, $\psi \in C(\mathbb{R}^2)$ に対して

$$\phi(x, z) = \psi(x), \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

とおくと, $\forall(x, z, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times [0, \infty)$ に対して

$$J_3[\phi](x, z, t) = \frac{t}{2\pi} \int_{|\xi| < 1} \frac{\psi(x + t\xi)}{\sqrt{1 - |\xi|^2}} d\xi$$

が成り立つことを示せ.

$(\varphi, \psi) \in C^1(\mathbb{R}^2) \times C(\mathbb{R}^2)$, $f \in C(\mathbb{R}^2 \times [0, T))$ に対して

$$J_2[\psi](x, t) = \frac{t}{2\pi} \int_{|\xi| < 1} \frac{\psi(x + t\xi)}{\sqrt{1 - |\xi|^2}} d\xi, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty),$$

$$K_2[\varphi, \psi](x, t) = J_2[\psi](x, t) + \partial_t J_2[\varphi](x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty),$$

$$L_2[f](x, t) = \int_0^t \frac{t-s}{2\pi} \int_{|\xi| < 1} \frac{f(x + (t-s)\xi, s)}{\sqrt{1 - |\xi|^2}} d\xi ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T)$$

とおくと, 次が成り立つ.

定理 4 $(\varphi, \psi) \in C^3(\mathbb{R}^2) \times C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla^\alpha f \in C(\mathbb{R}^2 \times [0, T))$ ($|\alpha| \leq 2$) とすると

$$\begin{cases} \square u = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

の一意的な古典解 $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, T))$ は

$$u(x, t) = K_2[\varphi, \psi](x, t) + L_2[f](x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T)$$

で与えられる.

球対称な場合は, 次の公式が成り立つ.

定理 5 $n = 2, 3$, $g \in C([0, \infty))$ とし, $\tilde{g}(x) = g(|x|)$ ($x \in \mathbb{R}^n$), $r = |x|$ とおくと, $\forall(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ に対して

$$J_3[\tilde{g}](x, t) = \frac{1}{2r} \int_{|r-t|}^{r+t} \lambda g(\lambda) d\lambda,$$

$$J_2[\tilde{g}](x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \left(\int_{|r-\rho|}^{r+\rho} \frac{\lambda g(\lambda)}{\sqrt{(r+\rho)^2 - \lambda^2} \sqrt{\lambda^2 - (r-\rho)^2}} d\lambda \right) d\rho.$$

証明 $n = 3$ の場合, $\omega = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \in S^2$ に対して, $\lambda = |x + t\omega|$ とおくと, $\lambda^2 = t^2 \sin^2 \phi + (r + t \cos \phi)^2 = t^2 + r^2 + 2rt \cos \phi$. このとき, $\phi : 0 \rightarrow \pi$ のとき $\lambda : r + t \rightarrow |r - t|$ で, $\lambda d\lambda = -rt \sin \phi d\phi$ だから

$$\frac{t}{4\pi} \int_{S^2} g(|x + t\omega|) dS_\omega = \frac{t}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(\lambda) \sin \phi d\theta d\phi = \frac{1}{2r} \int_{|r-t|}^{r+t} \lambda g(\lambda) d\lambda.$$

$n = 2$ の場合も同様の方針で計算すればできるが, 詳細は省略する. □

§4. 非線形波動方程式

$n \in \mathbb{N}$, $p > 1$ とし,

$$(1) \quad \begin{cases} \square u = |u|^p, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

について考える. 初期値問題 (1) の解 u が存在する T の上限を u の最大存在時間といい, $T^*(\varphi, \psi)$ と表す. $T^*(\varphi, \psi) = \infty$ のとき, u は時間大域的に存在するといいい, $T^*(\varphi, \psi) < \infty$ のとき, u は有限時間で爆発するという. 主な既知の結果をまとめる. $n \geq 2$ に対して, $p_0(n)$ を, $(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$ の正根, すなわち

$$p_0(n) = \frac{n+1 + \sqrt{n^2 + 10n - 7}}{2(n-1)}$$

とする. 例えば, $p_0(2) = (3 + \sqrt{17})/2$, $p_0(3) = 1 + \sqrt{2}$, $p_0(4) = 2, \dots$.

- H. Levine (1974) : large data blowup for $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p > 1$.
- F. John (1979) : $n = 3$ のとき, small data global existence for $p > p_0(3)$;
small data blowup for $1 < p < p_0(3)$.
- T. Kato (1980) : small data blowup for $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n-1)p \leq (n+1)$.
特に, small data blowup for $n = 1$ and $\forall p > 1$.
- R. Glassey (1981) : $n = 2$ のとき, small data global existence for $p > p_0(2)$;
small data blowup for $1 < p < p_0(2)$.
- J. Schaeffer (1985) : small data blowup for $n = 2, 3$ and $p = p_0(n)$.
- T. Sideris (1984) : small data blowup for $n \geq 4$ and $1 < p < p_0(n)$.
- V. Georgiev, H. Lindblad and C. Sogge (1997) :
small data global existence for $n \geq 4$ and $p > p_0(n)$.
- B. Yordanov and Q. S. Zhang (2006) :
small data blowup for $n \geq 4$ and $p = p_0(n)$.

§5. 小さいデータに対する大域存在定理

$n = 3$, $p > 1 + \sqrt{2}$ とし, 初期データ (φ, ψ) が小さい場合に

$$(1) \quad \begin{cases} \square u = |u|^p, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

または “同値な” 積分方程式

$$(2) \quad u = K_3[\varphi, \psi] + L_3[|u|^p], \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$$

の時間大域解の存在について考える. 以下, $\langle y \rangle := 1 + |y|$ とおく. また, $\mu, \kappa \in \mathbb{R}$, $f \in C(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ に対して

$$\|f\|_{X(\mu, \kappa)} := \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)} \langle |x| + t \rangle^\mu \langle |x| - t \rangle^\kappa |f(x, t)|$$

とおく. また, $(\varphi, \psi) \in C^1(\mathbb{R}^3) \times C(\mathbb{R}^3)$ に対して

$$\|(\varphi, \psi)\|_{Y(\kappa)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \{ \langle x \rangle^{1+\kappa} |\varphi(x)| + \langle x \rangle^{2+\kappa} (|\nabla \varphi(x)| + |\psi(x)|) \}.$$

定理 1 $p > 1 + \sqrt{2}$ のとき, $\exists \varepsilon_0 = \varepsilon_0(p) > 0$, $\exists C_1 = C_1(p) > 0$:

$(\varphi, \psi) \in C^1(\mathbb{R}^3) \times C(\mathbb{R}^3)$, $\|(\varphi, \psi)\|_{Y(p-2)} \leq \varepsilon_0$ ならば, 積分方程式 (2) の解が

$$\{v \in C(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)) : \|v\|_{X(1, p-2)} \leq 2C_1 \varepsilon_0\}$$

において一意的に存在する.

注意 C_1 は次の命題 2 に現れる正定数である.

命題 2 $p > 1 + \sqrt{2}$ のとき, $\exists C_1 = C_1(p) > 0$, $\exists C_2 = C_2(p) > 0$:

$$\|K_3[\varphi, \psi]\|_{X(1, p-2)} \leq C_1 \|(\varphi, \psi)\|_{Y(p-2)}, \quad \|L_3[f]\|_{X(1, p-2)} \leq C_2 \|f\|_{X(p, p(p-2))}.$$

問 3 $k > 0$ のとき, 次が成り立つ.

$$\min\{1, k\}(1-s) \leq 1-s^k \leq \max\{1, k\}(1-s), \quad (0 \leq s \leq 1).$$

補題 4 $\forall k > 0$, $\exists C > 0$:

$$\int_{|r-t|}^{r+t} \frac{d\rho}{\langle \rho \rangle^{1+k}} \leq \frac{C \min\{r, t\}}{\langle r+t \rangle \langle r-t \rangle^k}, \quad (r, t) \in [0, \infty)^2.$$

証明 一般性を失うことなく, $r \geq t$ と仮定してよい.

$$\int_{r-t}^{r+t} \frac{d\rho}{(1+\rho)^{1+k}} = \left[\frac{-1}{k} (1+\rho)^{-k} \right]_{r-t}^{r+t} = \frac{1}{k(1+r-t)^k} \left\{ 1 - \left(\frac{1+r-t}{1+r+t} \right)^k \right\}.$$

ここで, 問3より

$$1 - \left(\frac{1+r-t}{1+r+t} \right)^k \leq \max\{1, k\} \left(1 - \frac{1+r-t}{1+r+t} \right) = \frac{2 \max\{1, k\} t}{1+r+t}.$$

$\min\{r, t\} = t$ だから, $C = 2 \max\{1, k\}/k$ として望みの不等式を得る. $\square$

命題5 $\kappa > 0$ のとき, $\exists C = C(\kappa) > 0$:

$$\|K_3[\varphi, \psi]\|_{X(1, \kappa)} \leq C \|(\varphi, \psi)\|_{Y(\kappa)}.$$

証明 $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ に対して, $r = |x|$ とおくと, §3 定理5より

$$\begin{aligned} & |K_3[\varphi, \psi](x, t)| \\ & \leq \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} |\varphi(x + t\omega)| dS_\omega + \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} (|\nabla \varphi(x + t\omega)| + |\psi(x + t\omega)|) dS_\omega \\ & \leq \|(\varphi, \psi)\|_{Y(\kappa)} \left(\frac{1}{2rt} \int_{|r-t|}^{r+t} \frac{\rho d\rho}{\langle \rho \rangle^{1+\kappa}} + \frac{1}{2r} \int_{|r-t|}^{r+t} \frac{\rho d\rho}{\langle \rho \rangle^{2+\kappa}} \right). \end{aligned}$$

ここで, 補題4より

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \int_{|r-t|}^{r+t} \frac{\rho d\rho}{\langle \rho \rangle^{2+\kappa}} & \leq \frac{1}{r} \int_{|r-t|}^{r+t} \frac{d\rho}{\langle \rho \rangle^{1+\kappa}} \leq \frac{C}{\langle r+t \rangle \langle r-t \rangle^\kappa}, \\ \frac{1}{rt} \int_{|r-t|}^{r+t} \frac{\rho d\rho}{\langle \rho \rangle^{1+\kappa}} & \leq \frac{r+t}{rt} \int_{|r-t|}^{r+t} \frac{d\rho}{\langle \rho \rangle^{1+\kappa}} \leq C \frac{(r+t) \min\{r, t\}}{rt \langle r+t \rangle \langle r-t \rangle^\kappa} \leq \frac{C}{\langle r+t \rangle \langle r-t \rangle^\kappa}. \end{aligned}$$

これから望みの不等式を得る. $\square$

命題6 $\mu > 2, \kappa > 1$ のとき, $\exists C = C(\mu, \kappa) > 0$:

$$\|L_3[f]\|_{X(1, \mu-2)} \leq C \|f\|_{X(\mu, \kappa)}.$$

証明 $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ に対して, $r = |x|$ とおくと, §3 定理5より

$$|L_3[f](x, t)| \leq \|f\|_{X(\mu, \kappa)} I(r, t), \quad I(r, t) = \frac{1}{2r} \iint_{D(r, t)} \frac{\lambda d\lambda ds}{\langle \lambda + s \rangle^\mu \langle \lambda - s \rangle^\kappa}.$$

ここで, $D(r, t) = \{(\lambda, s) \in [0, \infty)^2 : 0 \leq s \leq t, |r-t+s| \leq \lambda \leq r+t-s\}$. よって

$$(3) \quad I(r, t) \leq \frac{C}{\langle r+t \rangle \langle r-t \rangle^{\mu-2}}, \quad (r, t) \in [0, \infty)^2$$

を示せばよい. ここで, $\xi = s + \lambda$, $\eta = s - \lambda$ とおくと

$$I(r, t) \leq \frac{C}{r} \int_{|r-t|}^{r+t} \left(\int_{-\xi}^{\xi} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{\kappa}} \right) \frac{d\xi}{\langle \xi \rangle^{\mu-1}}.$$

$\kappa > 1$ だから, $\int_{-\infty}^{\infty} \langle \eta \rangle^{-\kappa} d\eta < \infty$. よって, 補題 4 から (3) を得る. $\square$

$p > 1 + \sqrt{2}$ のとき, $p > 2$, $p(p-2) > 1$ だから, 命題 5, 6 から命題 2 が成り立つ.

定理 1 の証明 $X_{\varepsilon_0} := \{v \in C(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)) : \|v\|_{X(1,p-2)} \leq 2C_1\varepsilon_0\}$ とおく. また, 写像 $\Phi : X_{\varepsilon_0} \rightarrow C(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ を

$$\Phi[v] := K_3[\varphi, \psi] + L_3[|v|^p], \quad v \in X_{\varepsilon_0}$$

と定める. このとき, $C_2 p 2^{p+1} (C_1 \varepsilon_0)^{p-1} \leq 1$ ならば

$$(A) \quad \forall v \in X_{\varepsilon_0}, \|\Phi[v]\|_{X(1,p-2)} \leq 2C_1\varepsilon_0$$

$$(B) \quad \forall v_1, v_2 \in X_{\varepsilon_0}, \|\Phi[v_1] - \Phi[v_2]\|_{X(1,p-2)} \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_{X(1,p-2)}$$

が成り立つことを示す. X_{ε_0} は $d(v_1, v_2) := \|v_1 - v_2\|_{X(1,p-2)}$ を距離として完備だから, (A), (B) が示されれば, 縮小写像の原理により, Φ の不動点が X_{ε_0} において一意に存在し, 積分方程式 (2) の一意解を与えることが分る.

まず, (A) を示す. $v \in X_{\varepsilon_0}$ とすると, 命題 2 より

$$\begin{aligned} \|\Phi[v]\|_{X(1,p-2)} &\leq \|K_3[\varphi, \psi]\|_{X(1,p-2)} + \|L_3[|v|^p]\|_{X(1,p-2)} \\ &\leq C_1 \|(\varphi, \psi)\|_{Y(p-2)} + C_2 \| |v|^p \|_{X(p,p(p-2))} \\ &\leq C_1 \varepsilon_0 + C_2 \|v\|_{X(1,p-2)}^p \leq C_1 \varepsilon_0 + C_2 (2C_1 \varepsilon_0)^p. \end{aligned}$$

よって, $C_2 2^p (C_1 \varepsilon_0)^{p-1} \leq 1$ ならば, (A) が成り立つ.

最後に, (B) を示す. $v_1, v_2 \in X_{\varepsilon_0}$ とすると, 命題 2 より

$$\|\Phi[v_1] - \Phi[v_2]\|_{X(1,p-2)} = \|L_3[|v_1|^p - |v_2|^p]\|_{X(1,p-2)} \leq C_2 \| |v_1|^p - |v_2|^p \|_{X(p,p(p-2))}.$$

ここで, $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $\|s|^p - |t|^p\| \leq p(|s|^{p-1} + |t|^{p-1})|s - t|$ だから

$$\begin{aligned} \|\Phi[v_1] - \Phi[v_2]\|_{X(1,p-2)} &\leq C_2 p (|v_1|^{p-1} + |v_2|^{p-1}) \|v_1 - v_2\|_{X(p,p(p-2))} \\ &\leq C_2 p \| |v_1|^{p-1} + |v_2|^{p-1} \|_{X(p-1,(p-1)(p-2))} \|v_1 - v_2\|_{X(1,p-2)} \\ &\leq C_2 p \{ \|v_1\|_{X(1,p-2)}^{p-1} + \|v_2\|_{X(1,p-2)}^{p-1} \} \|v_1 - v_2\|_{X(1,p-2)}. \end{aligned}$$

よって, $C_2 p 2^{p+1} (C_1 \varepsilon_0)^{p-1} \leq 1$ ならば, (B) が成り立つ. $\square$

初期データの滑らかさを仮定すれば, 初期値問題 (1) の時間大域的な古典解の存在を示すことができる.

定理 7 $p > 1 + \sqrt{2}$ のとき, 初期データ $(\varphi, \psi) \in C^3(\mathbb{R}^3) \times C^2(\mathbb{R}^3)$ に対して, $\max_{|\alpha| \leq 2} \|(\nabla^\alpha \varphi, \nabla^\alpha \psi)\|_{Y(p-2)}$ が十分小さければ, 初期値問題 (1) の時間大域的な古典解が一意的に存在する.

定理 7 は, 定理 1 とほぼ同様に証明することができる. 詳しくは, John (1979) [6], Asakura (1986) [1] を参照せよ. また, $n = 2$ の場合の大域存在定理については, Glassey (1981) [5], Kubota (1993) [9], Tsutaya (1993) [14] を参照せよ.

§6. 解の爆発

John (1979) [6], Zhou (1992) [16], Takamura (1994) [13]などを参考にして, $n = 2, 3, 1 < p \leq p_0(n)$ のとき

$$\begin{cases} \square u = |u|^p, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T), \\ u(x, 0) = 0, \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

または “同値な” 積分方程式

$$(1) \quad u = J_n[\psi] + L_n[|u|^p], \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T)$$

の解の爆発について考察する. ここで, $m = (n - 1)/2$ とおくと, $p_0(n)$ は

$$p\{m(p - 1) - 1\} = 1$$

の正根で, $p_0(2) = (3 + \sqrt{17})/2$, $p_0(3) = 1 + \sqrt{2}$ である.

定理 1 $n = 2, 3, 1 < p \leq p_0(n)$ とし

$$(H) \quad \psi \in C(\mathbb{R}^n), \quad \psi(x) \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad \psi(0) > 0$$

を仮定する. このとき, 積分方程式 (1) の解は有限時間で爆発する.

注意 仮定 (H) より, $u(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T)$. また

$$(2) \quad \exists C_0 > 0, \exists \delta \in (0, 1) : \psi(x) \geq C_0 \chi_{[0, \delta]}(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

補題 2 $n = 2, 3, G \in C(\mathbb{R}^n), g \in C([0, \infty)), G(x) \geq g(|x|) \geq 0$ for $\forall x \in \mathbb{R}^n$ のとき, $r = |x|$ とおくと

$$J_n[G](x, t) \geq \frac{1}{2r^m} \int_{|r-t|}^{r+t} \lambda^m g(\lambda) d\lambda, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty).$$

証明 $n = 3$ の場合は, §3 定理 5 から直ちに従う. $n = 2$ の場合は, §3 定理 5 より

$$J_2[G](x, t) \geq \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \left(\int_{|r-\rho|}^{r+\rho} \frac{\lambda g(\lambda)}{\sqrt{(r+\rho)^2 - \lambda^2} \sqrt{\lambda^2 - (r-\rho)^2}} d\lambda \right) d\rho.$$

さらに, $g(r) \geq 0$ ($r \geq 0$) だから

$$J_2[G](x, t) \geq \frac{2}{\pi} \int_{|r-t|}^{r+t} \lambda g(\lambda) \left(\int_{|r-\lambda|}^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2} \sqrt{\rho^2 - (r-\lambda)^2} \sqrt{(r+\lambda)^2 - \rho^2}} \right) d\lambda$$

で, $\rho \geq |r-\lambda|$ のとき, $(r+\lambda)^2 - \rho^2 \leq 4r\lambda$ だから

$$J_2[G](x, t) \geq \frac{2}{\pi} \frac{1}{2\sqrt{r}} \int_{|r-t|}^{r+t} \sqrt{\lambda} g(\lambda) \left(\int_{|r-\lambda|}^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2} \sqrt{\rho^2 - (r-\lambda)^2}} \right) d\lambda.$$

ここで, $0 \leq a < b$ に対して

$$\int_a^b \frac{\rho}{\sqrt{b^2 - \rho^2} \sqrt{\rho^2 - a^2}} d\rho = \frac{\pi}{2}$$

(Kubota [9, Lemma 2.4]) だから, $n = 2$ の場合も示された. □

補題 2 と Duhamel の原理より次が成り立つ.

補題 3 $n = 2, 3$, $F \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T))$, $f \in C([0, \infty) \times [0, T))$, $F(x, t) \geq f(|x|, t) \geq 0$ for $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T)$ のとき, $r = |x|$ とおくと

$$L_n[F](x, t) \geq \frac{1}{2r^m} \iint_{D(r, t)} \lambda^m f(\lambda, s) d\lambda ds,$$

$$D(r, t) = \{(\lambda, s) \in [0, \infty)^2 : 0 \leq s \leq t, |r - t + s| \leq \lambda \leq r + t - s\}.$$

問 4 $\forall k \in \mathbb{R}, \exists C = C(k) > 0$:

$$\int_{t-r}^{t+r} \frac{d\rho}{\rho^{1+k}} \geq \frac{Cr}{(t+r)(t-r)^k}, \quad t > r > 0.$$

以下, $r = |x|$ とし, $Q \subset [0, \infty)^2$ に対して

$$\tilde{Q} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) : (r, t) \in Q\}$$

とおく.

定理 1 の証明 4 段階に分ける.

Step 1 $D_1 = \{(r, t) \in [0, \infty)^2 : 0 \leq t - r \leq \delta/2, t + r \geq \delta\}$ とおくと

$$\exists C > 0 : u(x, t) \geq \frac{C}{r^m}, \quad (x, t) \in \tilde{D}_1.$$

実際, $L_n[|u|^p](x, t) \geq 0$ だから, (2) と補題 2 より, $\forall (x, t) \in \tilde{D}_1$ に対して

$$\begin{aligned} u(x, t) &\geq J_n[\psi](x, t) \geq \frac{C_0}{2r^m} \int_{t-r}^{t+r} \lambda^m \chi_{[0, \delta]}(\lambda) d\lambda \\ &\geq \frac{C_0}{2r^m} \int_{\delta/2}^{\delta} \lambda^m d\lambda = \frac{C}{r^m}. \end{aligned}$$

Step 2 $p^* = m(p-1) - 1$ とおく. また, $y \geq 1$ に対して

$$\Sigma(y) = \{(r, t) \in [0, \infty)^2 : t - r \geq y\}$$

とおく. このとき, $\exists C_1 > 0$:

$$u(x, t) \geq \frac{C_1 r^{1-m}}{(t+r)(t-r)^{p^*}}, \quad (x, t) \in \tilde{\Sigma}(1).$$

実際, Step 1 と補題 3 より, $\forall (x, t) \in \tilde{\Sigma}(1)$ に対して

$$\begin{aligned} u(x, t) &\geq L_n[|u|^p](x, t) \geq \frac{C}{r^m} \iint_{D(r, t) \cap D_1} \frac{d\lambda ds}{\lambda^{m(p-1)}} \\ &\geq \frac{C}{r^m} \iint_{D(r, t) \cap D_1} \frac{d\lambda ds}{(s + \lambda)^{m(p-1)}}. \end{aligned}$$

ここで, $\xi = s + \lambda$, $\eta = s - \lambda$ とおくと, 問 4 より

$$u(x, t) \geq \frac{C}{r^m} \int_{t-r}^{t+r} \frac{d\xi}{\xi^{m(p-1)}} \int_0^{\delta/2} d\eta \geq \frac{C r^{1-m}}{(t+r)(t-r)^{m(p-1)-1}}.$$

Step 3 $y \geq 1$ に対して

$$U(y) = \inf \{r^{-(1-m)}(t+r)(t-r)^{p^*} u(x, t) : (x, t) \in \tilde{\Sigma}(y)\}$$

とおくと, Step 2 より, $\forall y \geq 1$, $U(y) \geq U(1) \geq C_1$. また, $b = m + (1-m)p$ とおくと, $\exists C_2 > 0$:

$$(3) \quad U(y) \geq C_2 \int_1^y \left(1 - \frac{\eta}{y}\right)^b \frac{U(\eta)^p}{\eta^{pp^*}} d\eta, \quad \forall y \geq 1.$$

実際, $y \geq 1$ とすると, $\forall (x, t) \in \tilde{\Sigma}(y)$ に対して

$$u(x, t) \geq L_n[|u|^p](x, t) \geq \frac{1}{2r^m} \iint_{D(r, t) \cap \Sigma(1)} \frac{\lambda^b U(s - \lambda)^p}{(s + \lambda)^p (s - \lambda)^{pp^*}} d\lambda ds.$$

ここで, $\xi = s + \lambda$, $\eta = s - \lambda$ とおくと

$$\begin{aligned}
u(x, t) &\geq \frac{C}{r^m} \int_1^{t-r} \left(\int_{t-r}^{t+r} \frac{(\xi - \eta)^b U(\eta)^p}{\xi^p \eta^{pp^*}} d\xi \right) d\eta \\
&\geq \frac{C}{r^m} \int_{t-r}^{t+r} \frac{d\xi}{\xi^p} \int_1^{t-r} \frac{(t - r - \eta)^b U(\eta)^p}{\eta^{pp^*}} d\eta \\
&\geq \frac{Cr^{1-m}}{(t+r)(t-r)^{p-1}} \int_1^{t-r} \frac{(t - r - \eta)^b U(\eta)^p}{\eta^{pp^*}} d\eta \\
&= \frac{Cr^{1-m}}{(t+r)(t-r)^{p^*}} \int_1^{t-r} \left(1 - \frac{\eta}{t-r} \right)^b \frac{U(\eta)^p}{\eta^{pp^*}} d\eta.
\end{aligned}$$

また, $y \mapsto \int_1^y \left(1 - \frac{\eta}{y} \right)^b \frac{U(\eta)^p}{\eta^{pp^*}} d\eta$ は非減少だから, $\forall (x, t) \in \tilde{\Sigma}(y)$ に対して

$$r^{-(1-m)}(t+r)(t-r)^{p^*} u(x, t) \geq C \int_1^y \left(1 - \frac{\eta}{y} \right)^b \frac{U(\eta)^p}{\eta^{pp^*}} d\eta$$

となり, (3) が成り立つ.

Step 4 $1 < p \leq p_0(n)$ のとき, $pp^* \leq 1$ だから, Step 3 より

$$U(y) \geq C_1, \quad U(y) \geq C_2 \int_1^y \left(1 - \frac{\eta}{y} \right)^b \frac{U(\eta)^p}{\eta} d\eta, \quad \forall y \geq 1.$$

ここで, $F(s) = U(e^s)$ とおくと

$$F(s) \geq C_1, \quad F(s) \geq C_2 \int_0^s (1 - e^{-(s-\sigma)})^b F(\sigma)^p d\sigma, \quad s \geq 0$$

が成り立つ. よって, 次の補題 5 から定理 1 が従う. □

補題 5 $C_1, C_2 > 0$, $p > 1$, $b \geq 0$ とすると

$$(4) \quad F(s) \geq C_1, \quad F(s) \geq C_2 \int_0^s (1 - e^{-(s-\sigma)})^b F(\sigma)^p d\sigma, \quad s \geq 0$$

の解 $F(s)$ は有限時間で爆発する.

証明 主張 1 $\forall A > 0, \exists S = S(A) > 0 : s \geq S \Rightarrow F(s) \geq A$.

実際, (4) より

$$F(s) \geq C_1^p C_2 \int_0^s (1 - e^{-(s-\sigma)})^b d\sigma = C_1^p C_2 \int_0^s (1 - e^{-\tau})^b d\tau \rightarrow \infty \quad (s \rightarrow \infty).$$

主張 2 $A > 0, S > 0, 0 < h \leq 1, F(s) \geq A \ (s \geq S)$ ならば

$$F(s) \geq \frac{C_2(1 - e^{-1})^b}{b+1} h^{b+1} A^p \quad (s \geq S + h).$$

実際, $s \geq S + h$ のとき

$$F(s) \geq C_2 A^p \int_{s-h}^s (1 - e^{-(s-\sigma)})^b d\sigma = C_2 A^p \int_0^h (1 - e^{-\tau})^b d\tau.$$

$0 \leq \tau \leq 1$ のとき $1 - e^{-\tau} \geq (1 - e^{-1})\tau$ だから

$$F(s) \geq C_2 (1 - e^{-1})^b A^p \int_0^h \tau^b d\tau = \frac{C_2 (1 - e^{-1})^b}{b+1} h^{b+1} A^p$$

となり, 主張 2 が示された.

ここで, $\gamma = \max\{1, \frac{b+1}{C_2(1-e^{-1})^b}\}$ とおき, 数列 $\{A_j\}, \{S_j\}$ を

$$A_{j+1} = \frac{A_j^p}{\gamma j^{2(b+1)}}, \quad S_{j+1} = S_j + \frac{1}{j^2} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

と定める. 但し, A_1, S_1 は後で決める. このとき, $\forall j \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \log A_{j+1} &= p^j \left(\log A_1 - \sum_{k=1}^j \frac{\log \gamma}{p^k} - 2(b+1) \sum_{k=1}^j \frac{\log k}{p^k} \right) \\ &\geq p^j \left(\log A_1 - \frac{\log \gamma}{p-1} - 2(b+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{p^k} \right). \end{aligned}$$

ここで

$$A_1 = \exp \left(1 + \frac{\log \gamma}{p-1} + 2(b+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{p^k} \right)$$

ととると, 主張 1 より, $\exists S_1 > 0 : F(s) \geq A_1$ ($s \geq S_1$). また, 主張 2 より, $\forall j \in \mathbb{N}$ に対して, $F(s) \geq A_j$ ($s \geq S_j$) が成り立つ. さらに

$$A_j \geq \exp(p^{j-1}), \quad S_j = S_1 + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k^2} \quad (j \in \mathbb{N})$$

だから, $F(s)$ の最大存在時間は $\lim_{j \rightarrow \infty} S_j = S_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ 以下である. □

参考文献

- [1] F. Asakura, Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decreasing initial data in three space dimensions, *Comm. Partial Differential Equations* **11** (1986), 1459–1487.
- [2] クーラン・ヒルベルト, 数理物理学の方法 3, 4, 東京図書.
- [3] V. Georgiev, H. Lindblad and C. Sogge, Weighted Strichartz estimate and global existence for semilinear wave equation, *Amer. J. Math.* **119** (1997), 1291–1319.
- [4] R. T. Glassey, Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations, *Math. Z.* **177** (1981), 323–340.
- [5] R. T. Glassey, Existence in the large for $\square u = F(u)$ in two space dimensions, *Math. Z.* **178** (1981), 233–261.
- [6] F. John, Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Manuscripta Math.* **28** (1979), 235–268.
- [7] 金子晃, 偏微分方程式入門, 東京大学出版会.
- [8] T. Kato, Blow-up of solutions some nonlinear hyperbolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), 501–505.
- [9] K. Kubota, Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with initial data of non-compact support in low space dimensions, *Hokkaido Math. J.* **22** (1993), 123–180.
- [10] H. A. Levine, Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **192** (1974), 1–21.
- [11] J. Schaeffer, The equation $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ for the critical value of p , *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **101A** (1985), 31–44.
- [12] T. C. Sideris, Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions, *J. Differential Equations* **52** (1984), 378–406.

- [13] H. Takamura, An elementary proof of the exponential blow-up for semi-linear wave equations, *Math. Methods Appl. Sci.* **17** (1994), 239–249.
- [14] K. Tsutaya, Global existence theorem for semilinear wave equations with non-compact data in two space dimensions, *J. Differential Equations* **104** (1993), 332–360.
- [15] B. Yordanov and Q.S. Zhang, Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions, *J. Funct. Anal.* **231** (2006), 361–374.
- [16] Y. Zhou, Blow up of classical solutions to $\square u = |u|^{1+\alpha}$ in three space dimensions, *J. Partial Differential Equations* **5** (1992), 21–32.