エネルギーから観た非線形発展方程式

太田 雅人　(埼玉大学理学部)
mohta@rimath.saitama-u.ac.jp

§1. 序　一般に, 非線形発展方程式が与えられた場合,

1. 初期値問題の時間局所的な解の存在と一意性
2. 解の時間大域存在と爆発
3. 大域解の $t \to \infty$ としたときの漸近挙動

を調べることは, 最も基本的な問題と考えられる. 本稿では, 非線形波動方程式に対する初期・境界値問題 (1)–(3) を例にとり, 問題 2, 3 について基本的な結果を解説する. 基礎となるのは, エネルギー保存則 (4) と等式 (5) である. §2 では, エネルギー空間における時間局所解の存在と一意性について, 結果のみ述べる. §3 では, 解の大域存在と爆発のための十分条件について考える. §4 では, Cazenave [1] による大域解の有界性に関する結果を紹介する. 1985 年に出版された Cazenave の論文 [1] には, 大域解の有界性に関して先行する結果としては, 非線形熱方程式に対する Ôtani [9] (日本語による解説 [10] も参照のこと) が引用されているのみである. それから 20 年近く経った現在, 非線形熱方程式に対しては, 解の爆発率の研究との関連もあり, 著しい発展があった (例えば, 第 25 回発展方程式若手セミナー報告集における笹山智司氏と高市恭治氏の報告を参照のこと) が, 非線形波動方程式に対しては, この方面では, あまり進展がなかったように思われる. §5 では, 非線形波動方程式の解の爆発率に関する Merle and Zaag による論文 [7] で用いられた方法を, 非線形 Klein-Gordon 方程式の大域解の有界性に応用して得られる結果について述べる.

幹事の竹内慎吾氏から特別講演の依頼を受けた際, 特定の方程式の型にとらわれず, エネルギーという観点から非線形発展方程式に関する入門的な講演をして欲しい, というの要請があった (上記の講演題目は, この要

請に基づく). 本稿で考察する内容は, 結果と手法の両面において, 非線形熱方程式と共通する部分があり, 非線形波動方程式と非線形熱方程式の両方を比較しながら解説することも考えたが, 筆者の力不足のため, 実現できなかった. この点について, お詫びすると共に, 特別講演の機会を与えて頂いたことに関して, 竹内氏に感謝の意を表したい.

§2. 時間局所解の存在と一意性　次の非線形波動方程式に対する初期・境界値問題について考える.

$$\partial_t^2 u - \Delta u = |u|^{p-1}u, \quad x \in \Omega,\ t \geq 0, \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \partial_t u(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

以下, §4 まで, 次の条件 (A1), (A2) を仮定する.

(A1)　Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界領域で, その境界 $\partial\Omega$ は滑らか.

(A2)　$p > 1$ で, $N \geq 3$ のときは $p \leq N/(N-2)$.

　また, 次の記号を用いる.

記号　$\|u\|_q = \|u\|_{L^q(\Omega)}, \quad \|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_2, \quad X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$

$$E(u,v) = \frac{1}{2}\|v\|_2^2 + J(u), \quad J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1},$$
$$K(u) = \|\nabla u\|_2^2 - \|u\|_{p+1}^{p+1}.$$

このとき, 次の局所解の一意存在定理が成り立つ.

定理 2　条件 (A1), (A2) を仮定をする. このとき, $\forall (u_0, u_1) \in X$ に対して, (1)–(3) の解 $\vec{u} := (u, \partial_t u) \in C([0, T_{\max}), X)$ が一意的に存在し,

$$E(\vec{u}(t)) = E(u_0, u_1), \quad t \in [0, T_{\max}), \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|u(t)\|_2^2 = \|\partial_t u(t)\|_2^2 - K(u(t)), \quad t \in [0, T_{\max}) \tag{5}$$

をみたす. さらに, $T_{\max} < \infty$ ならば $\lim_{t \to T_{\max}} \|\vec{u}(t)\|_X = \infty$.

注意 2.1 (Poincaré, Sobolev の不等式) 仮定 (A1) より, $\exists C_0 = C_0(\Omega) > 0$ s.t. $\|u\|_2 \le C_0\|\nabla u\|_2$ for $\forall u \in H_0^1(\Omega)$. また, $N = 1$ のときは $2 \le q \le \infty$, $N = 2$ のときは $2 \le q < \infty$, $N \ge 3$ のときは $2 \le q \le 2N/(N-2)$ を仮定すると, $\exists C = C(q, \Omega) > 0$ s.t. $\|u\|_q \le C\|\nabla u\|_2$ for $\forall u \in H_0^1(\Omega)$.

注意 2.2 エネルギー保存則 (4) は, 形式的には, 方程式 (1) に $\partial_t u$ をかけて部分積分することにより得られる. しかし, 定理 2 で得られる弱解に対しては, そのような計算は直接はできないので, 滑らかな解による近似を考える必要がある. 等式 (5) は (1) に u をかけて部分積分することにより得られる. 定理 2 の証明については, Cazenave and Haraux [2] の Chapter 6 に丁寧で分りやすい説明がある.

§3. 解の大域存在と爆発 定理 2 に基づいて, 解の大域存在と爆発について考える. やや天下り的である (後述の注意 3.3 を参照のこと) が,

$$d = \inf\{J(u) : u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\},\ K(u) = 0\},$$

$$\mathcal{W} = \{(u, v) \in X : E(u, v) < d,\ K(u) \ge 0\},$$

$$\mathcal{V} = \{(u, v) \in X : E(u, v) < d,\ K(u) < 0\}$$

とおくと, 次の十分条件が成り立つ.

定理 3 ([13, 15, 11, 6]) 定理 2 と同じ仮定をする.

(i) $(u_0, u_1) \in \mathcal{W}$ ならば $T_{\max} = \infty$.

(ii) $(u_0, u_1) \in \mathcal{V}$ ならば $T_{\max} < \infty$.

まず, 定理 3(ii) を示すために, 次の補題を示す.

補題 3.1 (i) $d > 0$.

(ii) $u \in H_0^1(\Omega)$, $K(u) < 0$ ならば $\|\nabla u\|_2^2 > \dfrac{2(p+1)}{p-1} d$.

(iii) $\{(u, v) \in X : E(u, v) < 0\} \subset \mathcal{V}$.

(iv) $\mathcal{V}$ は (1)–(2) の流れに関して不変, すなわち,

$(u_0, u_1) \in \mathcal{V}$ ならば $\vec{u}(t) \in \mathcal{V}$ for $\forall t \in [0, T_{\max})$.

証明　(i)　$J(u)-\dfrac{1}{p+1}K(u)=\dfrac{p-1}{2(p+1)}\|\nabla u\|_2^2$ より

(6)　$$d=\inf\{\frac{p-1}{2(p+1)}\|\nabla u\|_2^2 : u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\},\ K(u)=0\}.$$

また, $K(u)=0$ なる $u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ を任意にとると, $K(u)=0$ と Sobolev の不等式より, $\|\nabla u\|_2^2=\|u\|_{p+1}^{p+1}\le C_1\|\nabla u\|_2^{p+1}$. ここで, $u\neq 0$ だから, $\|\nabla u\|_2^{p-1}\ge C_1^{-1}$. よって,

$$d\ge\frac{p-1}{2(p+1)}C_1^{-2/(p-1)}.$$

(ii)　$\lambda>0$ に対し, $K(\lambda u)=\lambda^2\|\nabla u\|_2^2-\lambda^{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}$. ここで, $K(u)<0$ だから, $\exists\lambda_1\in(0,1)$ s.t. $K(\lambda_1 u)=0$. また, $u\neq 0$ だから, (6) より,

$$\frac{2(p+1)}{p-1}d\le\|\nabla(\lambda_1 u)\|_2^2=\lambda_1^2\|\nabla u\|_2^2<\|\nabla u\|_2^2.$$

(iii)　(i) より, $E(u,v)<0$ ならば $E(u,v)<d$. また

(7)　$$-K(u)=\frac{p+1}{2}\|v\|_2^2+\frac{p-1}{2}\|\nabla u\|_2^2-(p+1)E(u,v)$$

より, $E(u,v)<0$ ならば $K(u)<0$.

(iv)　$\exists t_1\in(0,T_{\max})$ s.t. $K(u(t_1))=0$, $K(u(t))<0$ for $\forall t\in[0,t_1)$ と仮定すると, (ii) より, $\|\nabla u(t_1)\|_2^2\ge\dfrac{2(p+1)}{p-1}d$. よって, $d\le J(u(t_1))\le E(\vec{u}(t_1))<d$ となり, 矛盾. よって, $\forall t\in[0,T_{\max})$ に対して $K(u(t))<0$. また, E は保存量だから, $\forall t\in[0,T_{\max})$ に対して $E(\vec{u}(t))=E(\vec{u}(0))<d$. 故に, $\mathcal{V}$ は (1)–(2) の流れに関して不変であることが示された. □

定理 3(ii) の証明　$T_{\max}=\infty$ と仮定し, 矛盾を導く. $f(t)=\dfrac{1}{2}\|u(t)\|_2^2$, $E_0=E(u_0,u_1)$ とおくと, (5), (7) より,

(8)　$$f''(t)=\frac{p+3}{2}\|\partial_t u(t)\|_2^2+\frac{p-1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2-(p+1)E_0,\quad t\ge 0.$$

また, 補題 3.1(ii), (iv) より,

$$f''(t)\ge\frac{p+3}{2}\|\partial_t u(t)\|_2^2+(p+1)(d-E_0),\quad t\ge 0.$$

ここで, $E_0 < d$ だから, $\exists t_1 > 0$ s.t. $f(t) > 0$, $f'(t) > 0$ for $\forall t \geq t_1$. さらに, $\alpha = (p-1)/4$, $h(t) = f(t)^{-\alpha}$ とおくと, $h'(t) = -\alpha f(t)^{-\alpha-1} f'(t)$,

$$h''(t) = \alpha f(t)^{-\alpha-2} \{(\alpha+1) f'(t)^2 - f(t) f''(t)\} \leq 0, \quad t \geq t_1.$$

よって, $t \geq t_1$ のとき $h'(t) \leq h'(t_1) = -\alpha f(t_1)^{-\alpha-1} f'(t_1) < 0$ となり, $\exists t_2 \in (t_1, \infty)$ s.t. $h(t_2) = 0$. しかし, $f(t_2) < \infty$ だから, これは矛盾. 故に, $T_{\max} < \infty$. □

次に, 定理 3(i) を示すために, 次の補題を示す.

補題 3.2 (i) $\{(u,v) \in X : \|(u,v)\|_X^2 < 2d\} \subset \mathcal{W}$.

(ii) $(u,v) \in \mathcal{W}$ ならば $\|(u,v)\|_X^2 \leq \dfrac{2(p+1)}{p-1} E(u,v)$.

(iii) $\mathcal{W}$ は (1)–(2) の流れに関して不変である.

証明 (i) $\|(u,v)\|_X^2 < 2d$ とすると, $E(u,v) \leq \dfrac{1}{2}\|(u,v)\|_X^2 < d$. また,

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \|(u,v)\|_X^2 < 2d < \frac{2(p+1)}{p-1} d$$

だから, 補題 3.1(ii) より, $K(u) \geq 0$.

(ii) これは $K(u) \geq 0$ と (7) から従う.

(iii) $(u_0, u_1) \in \mathcal{W}$ とし, $\exists t_1 \in (0, T_{\max})$ s.t. $\vec{u}(t_1) \notin \mathcal{W}$ とすると, $\vec{u}(t_1) \in \mathcal{V}$. また, $\mathcal{V}$ は逆向きの時間に対しても不変だから, これは矛盾. よって, $\mathcal{W}$ は (1)–(2) の流れに関して不変である. □

定理 3(i) の証明 補題 3.2(ii), (iii) より, $\forall t \in [0, T_{\max})$ に対して,

$$\|\vec{u}(t)\|_X^2 \leq \frac{2(p+1)}{p-1} E(u_0, u_1).$$

よって, $T_{\max} = \infty$. □

注意 3.3 定理 3 と (1)–(2) の定常問題

$$-\Delta u = |u|^{p-1} u, \quad x \in \Omega; \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{9}$$

との関係について考える. $\varphi \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ を (9) の解とすると, $K(\varphi)=0$ だから, $E(\varphi,0)=J(\varphi)\ge d$. また, (9) の解 $\phi \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ で, $J(\phi)=d$, $K(\phi)=0$ をみたすもの (エネルギー最小定常解) が存在する. 任意の $\lambda>1$ に対し, $(\lambda\phi,0)\in\mathcal{V}$ だから, 定理 3(ii) より, $(\lambda\phi,0)$ を初期値とする (1)–(2) の解は有限時間で爆発する. これは, 定常解 ϕ の不安定性を示している. エネルギー最小定常解 ϕ 以外に, $J(\phi_k)\to\infty$ $(k\to\infty)$ をみたす (9) の解の列 $\{\phi_k\}\subset H_0^1(\Omega)$ が存在する. [14] において, ϕ_k の不安定性が考察されているが, 証明にギャップがあるようである.

注意 3.4 線形及び非線形の消散項が付いた非線形波動方程式に対しても, 定理 3 と同様な問題が考えられる ([3, 5, 8, 12, 16]).

§4. 大域解の有界性 この節では, Cazenave [1] 及び Cazenave and Haraux [2] の Chapter 8 に従って, 大域解の有界性について考える. 定理 3(i), 補題 3.2 より, 初期データ $(u_0,u_1)\in X$ が十分小さい ($\|(u_0,u_1)\|_X^2<2d$) ならば, (1)–(3) の解 $u(t)$ は大域的に存在して, エネルギー空間 X において有界 ($\sup_{t\ge0}\|\vec{u}(t)\|_X<\infty$) であることは分るが, ここで考察するのは, (1)–(3) の任意の大域解は X で有界か, という問題である. この問題に関して, 非線形項の増大度 p に関して, これまでよりも強い仮定をして, (1)–(3) の大域解 $u(t)$ で $\sup_{t\ge0}\|\vec{u}(t)\|_X=\infty$ をみたすもの (grow up solution) は存在しないことを示す.

定理 4 (Cazenave [1]) (A1), (A2) に加えて, $N=2$ のときは $p\le5$ を仮定する. このとき, $u(t)$ が (1)–(3) の大域解ならば, $\sup_{t\ge0}\|\vec{u}(t)\|_X<\infty$.

以下, $u(t)$ を (1)–(3) の大域解とし,

$$f(t)=\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2,\quad w(t)=\frac{1}{2}\|\vec{u}(t)\|_X^2,\quad E_0=E(u_0,u_1)$$

とおく. 定理 3(ii), 補題 3.1(iii) より, $E_0\ge0$ である. また, (8) より

$$f''(t)\ge(p-1)w(t)-(p+1)E_0,\quad t\ge0 \tag{10}$$

が成り立つ. 以下で, C_0 は Poincaré の不等式, $\|u\|_2 \le C_0\|\nabla u\|_2$ for $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, に現われる正定数とする.

補題 4.1 $\forall t \ge 0$ に対して, $f(t) \le \max\{f(0), \dfrac{p+1}{p-1}C_0^2E_0\}$.

証明 (8) と Poincaré の不等式より,

$$f''(t) \ge \frac{p+3}{2}\|\partial_t u(t)\|_2^2 + \frac{p-1}{C_0^2}f(t) - (p+1)E_0, \quad t \ge 0.$$

ここで, $g(t) = f(t) - \dfrac{p+1}{p-1}C_0^2E_0$ とおくと,

$$g''(t) \ge \frac{p+3}{2}\|\partial_t u(t)\|_2^2 + \frac{p-1}{C_0^2}g(t), \quad t \ge 0.$$

ここで, $\exists t_1 \ge 0$ s.t. $g(t_1) > 0$, $g'(t_1) > 0$ と仮定すると, $\forall t \ge t_1$ に対し, $g(t) \ge g(t_1)$. このとき, 定理 3(ii) の証明と同様にして, 矛盾が生じる. よって, $\forall t \ge 0$ に対して, $g(t) \le 0$ または $g'(t) \le 0$. これから, 望みの評価を得る. □

補題 4.2 $\forall t \ge 0$ に対して, $|f'(t)| \le \max\{|f'(0)|, \dfrac{p+1}{p-1}C_0E_0\}$.

証明 Poincaré の不等式より,

$$|f'(t)| \le \|u(t)\|_2\|\partial_t u(t)\|_2 \le C_0\|\nabla u(t)\|_2\|\partial_t u(t)\|_2 \le C_0 w(t).$$

これと (10) より,

$$f''(t) \ge \frac{p-1}{C_0}|f'(t)| - (p+1)E_0, \quad t \ge 0.$$

ここで, $g(t) = f'(t) - \dfrac{p+1}{p-1}C_0E_0$ とおくと, $g'(t) \ge \dfrac{p-1}{C_0}g(t)$. ここで, $\exists t_1 \ge 0$ s.t. $g(t_1) > 0$ と仮定すると, $t \to \infty$ のとき $g(t) \to \infty$. これから, $t \to \infty$ のとき $f(t) \to \infty$ となり, 補題 4.1 に矛盾する. よって, $\forall t \ge 0$ に対し, $f'(t) \le \dfrac{p+1}{p-1}C_0E_0$. 次に, $h(t) = -f'(t) - \dfrac{p+1}{p-1}C_0E_0$ とおくと, $h'(t) \le -\dfrac{p-1}{C_0}h(t)$. これから, $\forall t \ge 0$ に対し, $h(t) \le \max\{h(0), 0\}$. よって, $\forall t \ge 0$ に対し, $-f'(t) \le \max\{-f'(0), \dfrac{p+1}{p-1}C_0E_0\}$. □

補題 4.3 $\sup_{t\ge 0}\int_t^{t+1} w(s)\,ds < \infty.$

証明 (10), 補題 4.2 より, $\forall t \ge 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&(p-1)\int_t^{t+1} w(s)\,ds \\
&\le (p+1)E_0 + \int_t^{t+1} f''(s)\,ds = (p+1)E_0 + f'(t+1) - f'(t) \\
&\le (p+1)E_0 + 2\max\{|f'(0)|, \frac{p+1}{p-1}C_0E_0\}.
\end{aligned}$$

よって, 補題 4.3 が成り立つ. □

注意 4.4 補題 4.1, 4.2, 4.3 では, 局所解が一意的に存在すること, エネルギー等式 (4), (5) と Poincaré の不等式しか使っていない. 特に, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ や $N=2$ のとき $p \le 5$ という仮定は使っていない.

定理 4 の証明 エネルギー保存則 (4) より,

$$w(t) = E_0 + \frac{1}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}.$$

仮定 (A2) より, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ で

$$w'(t) = \int_\Omega |u(t)|^{p-1}u(t)\partial_t u(t)\,dx \le \|u(t)\|_{2p}^p \|\partial_t u(t)\|_2. \tag{11}$$

以下, 次元 N に関して場合分けして考える.

$\underline{N \ge 3 \text{ の場合}}$: この場合は, $1 < p \le N/(N-2) \le 3$ だから,

$$\|u\|_{2p}^p \le C\|\nabla u\|_2^p \le C(1+\|\nabla u\|_2^2)\|\nabla u\|_2.$$

よって, (11) より,

$$w'(t) \le C_1\{1+w(t)\}w(t).$$

ここで, Gronwall の不等式より, $t \ge 1$, $t-1 \le \tau \le t$ に対して

$$w(t) \le w(\tau)\exp\left(C_1\int_{t-1}^t \{1+w(s)\}\,ds\right).$$

これを $\tau \in [t-1, t]$ で積分すると,

$$w(t) \le \left(\int_{t-1}^{t} w(\tau)\, d\tau \right) \exp \left(C_1 \int_{t-1}^{t} \{1 + w(s)\}\, ds \right).$$

よって, 補題 4.3 より, $\sup_{t\ge 1} w(t) < \infty$. 故に, $\sup_{t \ge 0} w(t) < \infty$.

$\underline{N = 2 \text{ の場合}}$: $p \le 3$ のときは $N \ge 3$ の場合と同様に証明できるから, $p > 3$ とする. Gagliardo-Nirenberg の不等式より

$$\|u\|_{2p}^{p} \le C \|u\|_{p+1}^{(p+1)/2} \|\nabla u\|_{2}^{(p-1)/2}.$$

仮定から, $p \le 5$ だから, (11) より,

$$w'(t) \le C\{1 + \|u(t)\|_{p+1}^{p+1} + \|\nabla u(t)\|_2^2\} w(t).$$

ここで, エネルギー保存則 (4) より,

$$1 + \|u(t)\|_{p+1}^{p+1} + \|\nabla u(t)\|_2^2 \le C\{1 + w(t)\}.$$

よって, $w'(t) \le C_1\{1 + w(t)\}w(t)$. これから, $N \ge 3$ の場合と同様にして, $\sup_{t \ge 0} w(t) < \infty$ を得る.

$\underline{N = 1 \text{ の場合}}$: $N = 2$ の場合と同様だから, 省略する. □

注意 4.5 このような議論は, 解の爆発率を調べるときにも有効に使われる (Merle and Zaag [7]).

注意 4.6 $N = 2$ のとき $p \le 5$ という仮定が必要かどうかは未解決である (次節 §5 も参照のこと). 注意 4.4 でも述べたが, $N = 2$, $p > 5$ のときにも, (1)–(3) の任意の大域解 $u(t)$ は, 補題 4.1, 4.2, 4.3 の評価をみたす. また, (10) と補題 4.2 より, $\liminf_{t\to\infty} \|\vec{u}(t)\|_X^2 \le 2(p+1)E_0/(p-1)$ をみたす. もし grow up solution が存在したとすると, $\limsup_{t\to\infty} \|\vec{u}(t)\|_X^2 = \infty$ だから, そのエネルギーノルム $\|\vec{u}(t)\|_X$ は $t \to \infty$ としたとき, 激しく振動することになる (補題 4.3 も参照のこと). そのため, grow up solution の存在を示すことは, 大変に難しい問題であると思う.

§5. 大域解の有界性 (続き)　この節では, 非線形 Klein-Gordon 方程式

$$\partial_t^2 u - \Delta u + mu = |u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t \geq 0, \tag{12}$$

に対する初期値問題の大域解の有界性について考える. ここで, $m > 0$, $p > 1$ とし, $N \geq 3$ のときは $p < 1 + 4/(N-2)$ を仮定する. このとき, (12) に対する初期値問題は, エネルギー空間 $X = H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ で時間局所的に適切である ([4]). また, $\|u\|_q = \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$,

$$\begin{aligned}
&\|(u,v)\|_X^2 = \|\nabla u\|_2^2 + m\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2, \\
&J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{m}{2}\|u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}, \\
&K(u) = \|\nabla u\|_2^2 + m\|u\|_2^2 - \|u\|_{p+1}^{p+1}
\end{aligned}$$

と置き直せば, エネルギー保存則 (4) 及び等式 (5) が成り立つ. $\Omega = \mathbb{R}^N$ のときは, Poincaré の不等式, $\|u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2$ for $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, は成り立たないので, $m > 0$ は本質的な仮定である. $N \geq 3$, $p > N/(N-2)$ のとき, 埋め込み $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2p}(\mathbb{R}^N)$ は成り立たないので, 定理 4 の証明は使えないが, Merle and Zaag [7] による議論を用いると, $N \geq 2$, $p < 1+4/(N-1)$ のとき, (12) の大域解の有界性を示すことができる. $N = 2$ のとき $1+4/(N-1) = 5$, $N = 3$ のとき $1+4/(N-1) = N/(N-2) = 3$, $N \geq 4$ のとき $N/(N-2) < 1+4/(N-1)$ に注意する.

定理 5　$N \geq 2, 1 < p < 1+4/(N-1)$ とする. このとき, $\vec{u} \in C([0,\infty), X)$ が (12) の大域解ならば, $\sup_{t\geq 0} \|\vec{u}(t)\|_X < \infty$.

注意 5.1　定理 4 の証明と同様にして, $N = 2, 3$ のときは, $p = 1+4/(N-1)$ に対しても, 定理 5 の結論が成り立つことが分る. これから, $N \geq 4$, $p = 1+4/(N-1)$ のときも, 定理 5 の結論が成り立つことが期待されるが, 現時点では不明である. また, $1+4/(N-1) < p < 1+4/(N-2)$ の場合は, 全く未解決である (注意 4.6 も参照のこと).

定理5の証明　補題4.1, 4.3と同様にして, $1 < p < 1+4/(N-2)$ のとき

$$\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_2 < \infty, \quad \sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1}\|\vec{u}(s)\|_X^2\,ds < \infty \tag{13}$$

が成り立つ. また, エネルギー保存則 (4) と (13) の第2式より

$$C_1 := \sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1}\|u(s)\|_{p+1}^{p+1}\,ds < \infty \tag{14}$$

が成り立つ. 以下, Merle and Zaag [7] に従う.

Step 1.　$r = (p+3)/2$ に対して, $\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_r < \infty$ が成り立つ.

実際, (14) と平均値の定理より, $\forall t \geq 0$ に対して $\exists \tau(t) \in [t, t+1]$ s.t.

$$\|u(\tau(t))\|_{p+1}^{p+1} = \int_t^{t+1}\|u(s)\|_{p+1}^{p+1}\,ds \leq C_1.$$

$2 < r < p+1$ だから, 上式と (13) の第1式より, $\sup_{t\geq 0}\|u(\tau(t))\|_r < \infty$. また, $\forall t \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_r^r - \|u(\tau(t))\|_r^r &= \int_{\tau(t)}^t \frac{d}{ds}\|u(s)\|_r^r\,ds \\
&\leq C\int_t^{t+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u(s,x)|^{r-1}|\partial_s u(s,x)|\,dx\,ds \\
&\leq C\int_t^{t+1}(\|u(s)\|_{2(r-1)}^{2(r-1)} + \|\partial_s u(s)\|_2^2)\,ds.
\end{aligned}$$

ここで, $r = (p+3)/2$ より $2(r-1) = p+1$ だから, $\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_r < \infty$.

Step 2.　Gagliardo-Nirenberg の不等式より,

$$\|u(t)\|_{p+1} \leq C\|u(t)\|_r^{1-\theta}\|\nabla u(t)\|_2^{\theta}.$$

ここで

$$\frac{1}{p+1} = \theta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1-\theta}{r}$$

であり, $p < 1 + 4/(N-1)$ のとき $(p+1)\theta < 2$ だから, Step 1 より, $\exists C_2 > 0$ s.t.

$$\frac{2}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} \leq C_2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2, \quad t \geq 0.$$

さらに, エネルギー保存則 (4) より, $\forall t \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}\|\vec{u}(t)\|_X^2 &= 2E(\vec{u}(0)) + \frac{2}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} \\ &\leq 2E(\vec{u}(0)) + C_2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2.\end{aligned}$$

よって, $\sup_{t\geq 0}\|\vec{u}(t)\|_X < \infty$ が成り立つ. $\square$

注意 5.2 $m = 0$ の場合は, これまでの $m > 0$ の場合と状況が本質的に異なる. $m = 0$ の場合に, (12) の grow up solution の存在と非存在について調べることも, 面白い問題ではないかと思う.

参考文献

[1] T. Cazenave, Uniform estimates for solutions of nonlinear Klein-Gordon equations, J. Funct. Anal. **60** (1985) 36–55.

[2] T. Cazenave and A. Haraux, An introduction to semilinear evolution equations, Oxford Lecture Ser. Math. Appl. 13, Clarendon Press, 1998.

[3] V. Georgiev and G. Todorova, Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms, J. Differential Equations **109** (1994) 285–308.

[4] J. Ginibre and G. Velo, The global Cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation, Math. Z. **189** (1985) 487-505.

[5] R. Ikehata, Some remarks on the wave equations with nonlinear damping and source terms, Nonlinear Anal. **27** (1996) 1165–1175.

[6] H. Ishii, Asymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations, J. Differential Equations **26** (1977), 291–319.

[7] F. Merle and H. Zaag, Determination of the blow-up rate for the semilinear wave equation, Amer. J. Math. **125** (2003) 1147–1164.

[8] M. Ohta, Remarks on blowup of solutions for nonlinear evolution equations of second order, Adv. Math. Sci. Appl. **8** (1998) 901-910.

[9] M. Ôtani, Existence and asymptotic stability of strong solutions of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials, Qualitative theory of differential equations, pp. 795–809, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 30, North Holland, 1981.

[10] M. Ôtani, 劣微分作用素の差の項をもつ発展方程式の解の漸近挙動について, 京都大学数理解析研究所講究録 386 (1980), 89–108.

[11] L. E. Payne and D. H. Sattinger, Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations, Israel J. Math. **22** (1975), 273–303.

[12] P. Pucci and J. Serrin, Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy, J. Differential Equations **150** (1998) 203–214.

[13] D. H. Sattinger, On global solution of nonlinear hyperbolic equations, Arch. Rat. Mech. Anal. **30** (1968), 148–172.

[14] N. Sternberg, Blow up near higher modes of nonlinear wave equations, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), 315–325.

[15] M. Tsutsumi, On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space, Math. Japon. **17** (1972), 173–193.

[16] E. Vitillaro, Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation, Arch. Rational Mech. Anal. **149** (1999) 155–182.