デルタ関数をポテンシャルにもつ非線形シュレディンガー方程式の定在波解の安定性について[1]

埼玉大学理学部数学科　太田 雅人　(Masahito Ohta)
Department of Mathematics, Saitama University

1. 序

本稿では, デルタ関数をポテンシャルとして含む次の空間 1 次元の非線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u = -\partial_x^2 u + \gamma\delta(x)u - |u|^{p-1}u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \tag{1}$$

の定在波解の軌道安定性について考える. ここで, $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は未知関数, $\gamma\in\mathbb{R}$, $1<p<\infty$ は定数で, $\delta(x)$ は $x=0$ に台をもつデルタ関数を表す. 形式的な表現 $-\partial_x^2+\gamma\delta(x)$ は, $H^1(\mathbb{R})$ 上の 2 次形式

$$a_\gamma(u,v) = \mathrm{Re}\left\{\int_{\mathbb{R}} \partial_x u(x)\overline{\partial_x v(x)}\,dx + \gamma u(0)\overline{v(0)}\right\}, \quad u,v\in H^1(\mathbb{R})$$

から定まる作用素 A_γ または H_γ により定式化される. まず

$$|u(0)| \le \|u\|_{L^\infty} \le C\|u\|_{L^2}^{1/2}\|\partial_x u\|_{L^2}^{1/2}, \quad u\in H^1(\mathbb{R})$$

より, $|a_\gamma(u,v)| \le C\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$ for $u,v\in H^1(\mathbb{R})$. よって,

$$\langle A_\gamma u, v\rangle = a_\gamma(u,v), \quad u,v\in H^1(\mathbb{R})$$

をみたす有界線形作用素 $A_\gamma: H^1(\mathbb{R})\to H^{-1}(\mathbb{R})$ が一意的に定まる. 次に, $L^2(\mathbb{R})$ における線形作用素 H_γ を

$$D(H_\gamma) = \{v\in H^2(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cap H^1(\mathbb{R}) : \partial_x v(+0) - \partial_x v(-0) = \gamma v(0)\},$$

[1] 本稿は, 福泉麗佳氏, 小澤徹氏との共同研究 [8] に基づく.

$H_\gamma v = -\partial_x^2 v$ for $v \in D(H_\gamma)$ と定める．このとき, H_γ は $L^2(\mathbb{R})$ における自己共役作用素で, $(H_\gamma u, v)_{L^2} = a_\gamma(u,v)$ for $u, v \in D(H_\gamma)$ をみたす．また, 次のスペクトルの性質が知られている: $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\gamma) = \sigma_{\mathrm{ac}}(H_\gamma) = [0,\infty)$, $\sigma_{\mathrm{sc}}(H_\gamma) = \emptyset$. $\gamma \geq 0$ のとき $\sigma_{\mathrm{p}}(H_\gamma) = \emptyset$. $\gamma < 0$ のときは $\sigma_{\mathrm{p}}(H_\gamma) = \{-\gamma^2/4\}$ で, 対応する正規化された正値の固有関数は $(|\gamma|/2)^{1/2} e^{-|\gamma||x|/2}$. 詳しくは, [1, Chapter I.3] を参照のこと.

本稿では, $\gamma < 0$ の場合に, (1) の定在波解 $e^{i\omega t}\varphi_\omega(x)$ の構造と軌道安定性について考察する．ここで, $\omega \in \mathbb{R}$ はパラメータで, $\varphi_\omega \in H^1(\mathbb{R})$ は定常問題

$$A_\gamma \varphi + \omega\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi = 0 \quad \text{in } H^{-1}(\mathbb{R}) \tag{2}$$

の非自明解とする．エネルギー

$$E(v) = \frac{1}{2}\|\partial_x v\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2}|v(0)|^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

からも分かるように, 本稿では, ポテンシャルも非線形性も引力として働く場合を考えている．$p = 3$ の場合は, Goodman, Holmes and Weinstein [9] で考察されているが, 本稿では, 一般に $1 < p < \infty$ の場合を考える．また, $\gamma > 0$ の場合, すなわち, ポテンシャルは斥力, 非線形性は引力として働く場合は, Fukuizumi and Jeanjean [7] で考察されている.

さて, 定在波解の軌道安定性を議論するためには, 方程式 (1) に対する初期値問題のエネルギー空間 $H^1(\mathbb{R})$ における時間局所適切性が必要があるが, これは Cazenave [4] にあるエネルギー法を用いた抽象的な結果から従う．すなわち, 任意の $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ に対して, $T^* = T^*(u_0) \in (0,\infty]$ 及び $u(0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ を初期値とする (1) の解 $u \in C([0,T^*), H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T^*), H^{-1}(\mathbb{R}))$ が一意的に存在する．ここで, T^* は解 $u(t)$ の最大存在時間で, $T^* < \infty$ ならば $\lim_{t\to T^*}\|u(t)\|_{H^1} = \infty$ が成り立つ．さらに, 電荷及びエネルギーの保存則

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}, \quad E(u(t)) = E(u_0), \quad \forall t \in [0,T^*)$$

が成り立つ．詳しくは, [4] の Theorem 3.7.1, Corollary 3.3.11 を参照のこと．ここで, $H_\gamma + \gamma^2/4$ は非負自己共役作用素であり, $\omega > \gamma^2/4$ の

とき, $\{a_\gamma(u,u)+\omega\|u\|_{L^2}^2\}^{1/2}$ は $H^1(\mathbb{R})$ における通常のノルム $\|u\|_{H^1}=(\|\partial_x u\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^2}^2)^{1/2}$ と同値であることに注意する.

2. 定常問題

この § では, 定常問題 (2) の解の構造について考察する. $\gamma,\omega\in\mathbb{R}$ とする. まず, $S_\omega : H^1(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned} S_\omega(v) &= E(v)+\frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{2}\|\partial_x v\|_{L^2}^2+\frac{\gamma}{2}|v(0)|^2+\frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2-\frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \end{aligned}$$

と定めると, $\varphi\in H^1(\mathbb{R})$ に対して, φ が (2) をみたすことと $S'_\omega(\varphi)=0$ は同値であることに注意する. 定常問題 (2) の非自明解全体を $\mathcal{A}_\omega$ とおく:

$$\mathcal{A}_\omega=\{\varphi\in H^1(\mathbb{R}) : S'_\omega(\varphi)=0,\ \varphi\neq 0\}.$$

$\gamma=0$ のときは, $\omega>0$ ならば $\mathcal{A}_\omega=\{e^{i\theta}\psi_\omega(\cdot+y) : \theta,y\in\mathbb{R}\}$, ここで

$$\psi_\omega(x)=\left(\frac{(p+1)\omega}{2}\right)^{1/(p-1)}\left\{\cosh\left(\frac{(p-1)\sqrt{\omega}}{2}x\right)\right\}^{-2/(p-1)} \tag{3}$$

であることはよく知られている (たとえば, [4, Theorem 8.1.6]). $\omega\le 0$ ならば $\mathcal{A}_\omega=\emptyset$ である.

$\gamma\neq 0$ のとき, $\varphi\in\mathcal{A}_\omega$ は

$$\varphi\in C(\mathbb{R})\cap C^2(\mathbb{R}\setminus\{0\}), \tag{4}$$

$$-\varphi''+\omega\varphi-|\varphi|^{p-1}\varphi=0,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{5}$$

$$\varphi'(+0)-\varphi'(-0)=\gamma\varphi(0), \tag{6}$$

$$\varphi(x)\to 0,\ \varphi'(x)\to 0\quad (|x|\to\infty) \tag{7}$$

をみたすことが分かる. $x>0$, $x<0$ において, それぞれ, (5), (7) を解き, $x=0$ における境界条件 (6) をみたすようにすると, $\omega>\gamma^2/4$ のとき, (4)–(7) は正値解

$$\varphi_\omega(x)=\left(\frac{(p+1)\omega}{2}\right)^{1/(p-1)}\left\{\cosh\left(\frac{(p-1)\sqrt{\omega}}{2}|x|+b(\omega)\right)\right\}^{-2/(p-1)} \tag{8}$$

をもち, $\mathcal{A}_\omega = \{e^{i\theta}\varphi_\omega : \theta \in \mathbb{R}\}$ であることが分かる．ここで, $b(\omega) = \tanh^{-1}(-\gamma/2\sqrt{\omega})$. また, $\omega \le \gamma^2/4$ のときは $\mathcal{A}_\omega = \emptyset$ である.

次に, $\gamma < 0$, $\omega > \gamma^2/4$ の場合に, (1) の定在波解 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ の (軌道) 安定性を考察する.

定義　次が成り立つとき, (1) の定在波解 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は安定であるという: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ s.t. $u_0 \in U_\delta(\varphi_\omega)$ ならば $u(0) = u_0$ なる (1) の解 $u(t)$ は時間大域的に存在して, $\forall t \ge 0$ に対して $u(t) \in U_\varepsilon(\varphi_\omega)$. ここで,

$$U_\delta(\varphi) = \{v \in H^1(\mathbb{R}) : \inf_{\theta\in\mathbb{R}} \|v - e^{i\theta}\varphi\|_{H^1} < \delta\}.$$

安定でないとき, 不安定であるという.

次の定理 1 が本稿の主結果である.

定理 1　$\gamma < 0$, $\omega > \gamma^2/4$, $1 < p < \infty$ とする．$1 < p \le 5$ のとき, $\forall\omega \in (\gamma^2/4, \infty)$ に対して, (1) の定在波解 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は安定である．また, $p > 5$ のときは, $\exists\omega^* = \omega^*(\gamma, p) \in (\gamma^2/4, \infty)$ s.t. $\forall\omega \in (\gamma^2/4, \omega^*)$ に対して, $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は安定で, $\forall\omega \in (\omega^*, \infty)$ に対して, $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は不安定である.

注意 2　$\gamma = 0$ のときは, $1 < p < 5$ のとき, $\forall\omega > 0$ に対して, $e^{i\omega t}\psi_\omega$ は安定で, $p \ge 5$ のとき, $\forall\omega > 0$ に対して, $e^{i\omega t}\psi_\omega$ は不安定である ([2, 5, 4]).

$e^{i\omega t}\varphi_\omega$ の安定性は, $d(\omega) = S_\omega(\varphi_\omega)$ の 2 階微分の符号により決定される. すなわち, 次が成り立つ ([13, 14, 10, 11]).

命題 3　$\gamma < 0$, $\omega > \gamma^2/4$, $1 < p < \infty$ とする．このとき, $d''(\omega) > 0$ ならば $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は安定であり, $d''(\omega) < 0$ ならば $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は不安定である.

一般には, $d''(\omega)$ の符号の計算は困難であることが多いが, 本稿で考察している方程式 (1) に対しては, 定常解 φ_ω の具体的な表示式 (8) を用いて, $d''(\omega)$ を計算することが可能である．実際,

$$d'(\omega) = \langle S'_\omega(\varphi_\omega), \partial_\omega\varphi_\omega\rangle + \frac{1}{2}\|\varphi_\omega\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|\varphi_\omega\|_{L^2}^2,$$

$$\|\varphi_\omega\|_{L^2}^2 = C_p\omega^{\frac{5-p}{2(p-1)}}\int_{b(\omega)}^{\infty}(\cosh y)^{-4/(p-1)}\,dy$$

(C_p は p のみによる正定数) から, $1 < p \le 5$ のときは, $\forall\omega \in (\gamma^2/4, \infty)$ に対して, $d''(\omega) > 0$ であり, $p > 5$ のときは, $\exists\omega^* = \omega^*(\gamma, p) \in (\gamma^2/4, \infty)$ s.t. $\omega \in (\gamma^2/4, \omega^*)$ ならば $d''(\omega) > 0$, $\omega \in (\omega^*, \infty)$ ならば $d''(\omega) < 0$ であ

ることが分かる. このように, ある ω^* を境にして安定性と不安定性が変わることをきちんと示すことは, 定常解の具体的な表示式が得られている場合以外は難しいように思われる (関連する結果として [12] も参照のこと). 以下では, Shatah [13] の方法に基づいて, 命題 3 の "$d''(\omega) > 0$ ならば $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は安定である" を証明する. 不安定性の証明は省略する. Shatah [13] の方法に基づいた安定性の証明においては, 定常解 φ_ω の変分的特徴付けが本質的である (特に, §3 命題 6 が重要な役割を果たす).

3. 定常解の変分的特徴付け

以下, $\gamma < 0$, $\omega > \gamma^2/4$ とし

$$
\begin{aligned}
S_\omega(v) &= \frac{1}{2}\|\partial_x v\|_{L^2}^2 - \frac{|\gamma|}{2}|v(0)|^2 + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \\
I_\omega(v) &= \|\partial_x v\|_{L^2}^2 - |\gamma||v(0)|^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2 - \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \\
d(\omega) &= \inf\{S_\omega(v) : v \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ I_\omega(v) = 0\}, \\
\mathcal{M}_\omega &= \{v \in H^1(\mathbb{R}) : S_\omega(v) = d(\omega),\ I_\omega(v) = 0,\ v \neq 0\}, \\
\tilde{S}(v) &= S_\omega(v) - \frac{1}{2}I_\omega(v) = \frac{p-1}{2(p+1)}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}
\end{aligned}
$$

とおく. また, S_ω, I_ω,... において $\gamma = 0$ としたものを S_ω^0, I_ω^0,... とおく.

補題 4 $\exists C_1, C_2 > 0$ s.t.

$$C_1\|v\|_{H^1}^2 \leq \|\partial_x v\|_{L^2}^2 - |\gamma||v(0)|^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2 \leq C_2\|v\|_{H^1}^2, \quad v \in H^1(\mathbb{R}).$$

証明 2 番目の不等式は明らか. 1 番目の不等式は

$$\inf\{\|\partial_x v\|_{L^2}^2 - |\gamma||v(0)|^2 : v \in H^1(\mathbb{R}),\ \|v\|_{L^2} = 1\} = -\frac{\gamma^2}{4}$$

及び $\omega > \gamma^2/4$ より分かる. □

補題 5 $d(\omega) > 0$. また, $v \in H^1(\mathbb{R})$, $I_\omega(v) < 0$ ならば $d(\omega) < \tilde{S}(v)$.

証明 まず, $d(\omega) = \inf\{\tilde{S}(v) : v \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ I_\omega(v) = 0\}$ より, $d(\omega) \geq 0$. また, 補題 4 と Sobolev の不等式より, $v \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $I_\omega(v) = 0$ ならば, $C_1\|v\|_{H^1}^2 \leq \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq C_3\|v\|_{H^1}^{p+1}$. よって, $d(\omega) > 0$. 次に, $v \in H^1(\mathbb{R})$, $I_\omega(v) < 0$ とすると, $\exists\lambda_1 \in (0,1)$ s.t. $I_\omega(\lambda_1 v) = 0$. このとき, $v \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ だから, $d(\omega) \leq \tilde{S}(\lambda_1 v) = \lambda_1^{p+1}\tilde{S}(v) < \tilde{S}(v)$. □

命題 6 $\{v_j\} \subset H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ は, $S_\omega(v_j) \to d(\omega)$, $I_\omega(v_j) \to 0$ をみたすとする. このとき, $\{v_j\}$ の部分列 $\{v_{j'}\}$ と $\varphi \in \mathcal{M}_\omega$ が存在して, $v_{j'} \to \varphi$ in $H^1(\mathbb{R})$.

証明 (Step 1) 補題 4 より, $\{v_j\}$ は $H^1(\mathbb{R})$ の有界列だから, $H^1(\mathbb{R})$ で弱収束する部分列をもつ (以下, 部分列を改めて $\{v_j\}$ と表す): $v_j \to \varphi$ weakly in $H^1(\mathbb{R})$. このとき, 埋め込み $H^1(-1,1) \hookrightarrow C_b(-1,1)$ はコンパクトだから, $v_j(0) \to \varphi(0)$.

(Step 2) $\varphi \neq 0$ であることを背理法で示す. $\varphi = 0$ と仮定すると, $v_j(0) \to 0$ だから, $S_\omega(v_j) \to d(\omega)$, $I_\omega(v_j) \to 0$ より, $S^0_\omega(v_j) \to d(\omega)$, $I^0_\omega(v_j) \to 0$. また, ψ_ω を (3) で与えられた関数とすると, $\mathcal{M}^0_\omega = \{e^{i\theta}\psi_\omega(\cdot + y) : \theta, y \in \mathbb{R}\}$ だから, $I_\omega(\psi_\omega) = -|\gamma||\psi_\omega(0)|^2 < 0$. よって, 補題 5 より

$$d(\omega) < \tilde{S}(\psi_\omega) = \tilde{S}^0(\psi_\omega) = d^0(\omega). \tag{9}$$

ここで,

$$\lambda_j = \left(\frac{\|\partial_x v_j\|^2_{L^2} + \omega \|v_j\|^2_{L^2}}{\|v_j\|^{p+1}_{L^{p+1}}} \right)^{1/(p-1)}$$

とおくと, $I^0_\omega(\lambda_j v_j) = 0$. また, 補題 5 より

$$\|v_j\|^{p+1}_{L^{p+1}} = \frac{2(p+1)}{p-1}\tilde{S}(v_j) \to \frac{2(p+1)}{p-1} d(\omega) > 0$$

だから, $\lambda_j^{p-1} - 1 = I^0_\omega(v_j)/\|v_j\|^{p+1}_{L^{p+1}} \to 0$. すなわち, $\lambda_j \to 1$. ここで, $w_j = \lambda_j v_j$ とおくと, $w_j \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $I^0_\omega(w_j) = 0$ だから,

$$d^0(\omega) \le S^0_\omega(w_j) = \frac{p-1}{2(p+1)} \|w_j\|^{p+1}_{L^{p+1}} = \frac{p-1}{2(p+1)} \lambda_j^{p+1} \|v_j\|^{p+1}_{L^{p+1}} \to d(\omega).$$

よって, $d^0(\omega) \le d(\omega)$ となるが, これは (9) と矛盾する. 故に, $\varphi \neq 0$ であることが示された.

(Step 3) $I_\omega(\varphi) > 0$ であると仮定して矛盾を導く. Brezis and Lieb [3] の補題より

$$\tilde{S}(v_j) - \tilde{S}(v_j - \varphi) \to \tilde{S}(\varphi), \tag{10}$$

$$I_\omega(v_j) - I_\omega(v_j - \varphi) \to I_\omega(\varphi). \tag{11}$$

ここで, $I_\omega(\varphi) > 0$ と仮定しているので, (11) と $I_\omega(v_j) \to 0$ より, 十分大きな j に対しては $I_\omega(v_j - \varphi) < 0$. このとき, 補題 5 より, $\tilde{S}(v_j - \varphi) > d(\omega)$. また, $\tilde{S}(v_j) \to d(\omega)$ だから, (10) より, $\tilde{S}(\varphi) \le 0$ となるが, Step 2 より, $\varphi \neq 0$ だから, これは矛盾である.

(Step 4) Step 3 より, $I_\omega(\varphi) \le 0$ である. ここで, $I_\omega(\varphi) < 0$ と仮定すると, 補題 5 とノルムの弱下半連続性より, $d(\omega) < \tilde{S}(\varphi) \le \liminf_{j\to\infty} \tilde{S}(v_j) = d(\omega)$ となり矛盾である. 故に, $I_\omega(\varphi) = 0$ であることが示された. Step 2 より, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ だから, $d(\omega)$ の定義とノルムの弱下半連続性より,

$$d(\omega) \le \tilde{S}(\varphi) \le \liminf_{j\to\infty} \tilde{S}(v_j) = d(\omega).$$

これから, $\varphi \in \mathcal{M}_\omega$, $\|v_j\|_{L^{p+1}} \to \|\varphi\|_{L^{p+1}}$ が分かる. また, $v_j \to \varphi$ weakly in $H^1(\mathbb{R})$, $I_\omega(v_j) \to 0$, $v_j(0) \to \varphi(0)$, $I_\omega(\varphi) = 0$ だから,

$$\begin{aligned}\|\partial_x \varphi\|_{L^2}^2 + \omega\|\varphi\|_{L^2}^2 &\le \liminf_{j\to\infty}(\|\partial_x v_j\|_{L^2}^2 + \omega\|v_j\|_{L^2}^2) \\ &= |\gamma||\varphi(0)|^2 + \|\varphi\|_{L^{p+1}}^{p+1} = \|\partial_x \varphi\|_{L^2}^2 + \omega\|\varphi\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

故に, $v_j \to \varphi$ in $H^1(\mathbb{R})$. (はじめの $\{v_j\}$ の部分列を改めて $\{v_j\}$ と表していることに改めて注意する.) □

系 7 $\mathcal{M}_\omega = \mathcal{A}_\omega = \{e^{i\theta}\varphi_\omega : \theta \in \mathbb{R}\}$.

証明 $\varphi \in \mathcal{M}_\omega$ とすると, Lagrange 乗数法より, $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ s.t. $S'_\omega(\varphi) = \lambda I'_\omega(\varphi)$. このとき, $0 = I_\omega(\varphi) = \langle S'_\omega(\varphi), \varphi_\omega\rangle = \lambda\langle I'_\omega(\varphi), \varphi_\omega\rangle$. また, $I_\omega(\varphi) = 0$ より, $\langle I'_\omega(\varphi), \varphi_\omega\rangle = 2\|\partial_x\varphi\|_{L^2}^2 - 2|\gamma||\varphi(0)|^2 + 2\omega\|\varphi\|_{L^2}^2 - (p+1)\|\varphi\|_{L^{p+1}}^{p+1} = -(p-1)\|\varphi\|_{L^{p+1}}^{p+1} < 0$. よって, $\lambda = 0$ となり, $S'_\omega(\varphi) = 0$. 故に, $\mathcal{M}_\omega \subset \mathcal{A}_\omega$. さらに, $\mathcal{A}_\omega = \{e^{i\theta}\varphi_\omega : \theta \in \mathbb{R}\}$ であることと, 命題 6 より, $\mathcal{M}_\omega \neq \emptyset$ だから, $\mathcal{M}_\omega = \mathcal{A}_\omega$ が従う. □

4. 安定性の証明

前 § で示した定常解の変分的特徴付けと Shatah [13] の方法を用いて, $\omega_0 > \gamma^2/4$, $d''(\omega_0) > 0$ ならば (1) の定在波解 $e^{i\omega_0 t}\varphi_{\omega_0}$ は安定であることを証明する. まず, $\omega > \gamma^2/4$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\omega^+ &= \{v \in H^1(\mathbb{R}) : S_\omega(v) > d(\omega),\ \tilde{S}(v) < d(\omega)\}, \\ \mathcal{R}_\omega^- &= \{v \in H^1(\mathbb{R}) : S_\omega(v) < d(\omega),\ \tilde{S}(v) > d(\omega)\}\end{aligned}$$

とおく.

補題 8 $\mathcal{R}_\omega^+$ は (1) の流れに関して不変な集合である. すなわち, $u_0 \in \mathcal{R}_\omega^+$ ならば $u(0)=u_0$ なる (1) の解 $u(t)$ は $\forall t \in [0,T^*)$ に対して $u(t) \in \mathcal{R}_\omega^+$ をみたす. 同様に, $\mathcal{R}_\omega^-$ も (1) の流れに関して不変な集合である.

証明 $u_0 \in \mathcal{R}_\omega^+$ とすると, エネルギーと電荷の保存則より, $\forall t \in [0,T^*)$ に対して, $S_\omega(u(t)) = E(u(t)) + (\omega/2)\|u(t)\|_{L^2}^2 = S_\omega(u_0) < d(\omega)$. また, $\exists t_0 \in (0,T^*)$ s.t. $\tilde{S}(u(t_0)) = d(\omega)$ と仮定すると, $S_\omega(u(t_0)) < d(\omega) = \tilde{S}(u(t_0))$ より, $I_\omega(u(t_0)) < 0$. このとき, 補題 5 より, $d(\omega) < \tilde{S}(u(t_0))$ となり, 矛盾. よって, $\forall t \in (0,T^*)$ に対して, $\tilde{S}(u(t)) \neq d(\omega)$. さらに, $u \in C([0,T^*), H^1(\mathbb{R}))$ より, $t \mapsto \tilde{S}(u(t))$ は連続関数だから, $\forall t \in [0,T^*)$ に対して, $u(t) \in \mathcal{R}_\omega^+$ が成り立つ. $\mathcal{R}_\omega^-$ についても同様. □

補題 9 $d''(\omega_0) > 0$ とする. このとき, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $u_0 \in U_\delta(\varphi_{\omega_0})$ ならば $u(0)=u_0$ なる (1) の解 $u(t)$ は $\forall t \in [0,T^*)$ に対して, $d(\omega_0-\varepsilon) < \tilde{S}(u(t)) < d(\omega_0+\varepsilon)$ をみたす.

証明 $d'(\omega_0) = (1/2)\|\varphi_{\omega_0}\|_{L^2}^2 > 0$ だから, $d(\omega_0-\varepsilon) < d(\omega_0+\varepsilon)$. よって, $\delta > 0$ を十分小さくとれば, $u_0 \in U_\delta(\varphi_{\omega_0})$ ならば $d(\omega_0-\varepsilon) < \tilde{S}(u_0) < d(\omega_0+\varepsilon)$. よって, 補題 8 より, (必要なら δ を小さく取り直して) $u_0 \in U_\delta(\varphi_{\omega_0})$ ならば $S_{\omega\pm\varepsilon}(u_0) < d(\omega_0 \pm \varepsilon)$ となることを示せばよい.

$$\begin{aligned} &S_{\omega\pm\varepsilon}(u_0) = S_{\omega\pm\varepsilon}(\varphi_{\omega_0}) + O(\delta) = S_\omega(\varphi_{\omega_0}) \pm \frac{\varepsilon}{2}\|\varphi_{\omega_0}\|_{L^2}^2 + O(\delta) \\ &= d(\omega_0) \pm \varepsilon d'(\omega_0) + O(\delta). \end{aligned}$$

一方, Taylor 展開により, $\exists \omega_1 = \omega_1(\varepsilon) \in (\omega_0-\varepsilon, \omega_0+\varepsilon)$ s.t.

$$d(\omega_0 \pm \varepsilon) = d(\omega_0) \pm \varepsilon d'(\omega_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} d''(\omega_1).$$

ここで, ($\varepsilon > 0$ が十分小さければ) $d''(\omega_1) > 0$ だから, δ を十分小さくとれば, $S_{\omega\pm\varepsilon}(u_0) < d(\omega_0 \pm \varepsilon)$ が成り立つ. □

命題 6 と補題 9 を用いて目的の証明をする.

命題 3 の証明 (安定性のみ) $d''(\omega_0) > 0$ のとき, (1) の定在波解 $e^{i\omega_0 t}\varphi_{\omega_0}$ が安定であることを背理法で示す. $e^{i\omega_0 t}\varphi_{\omega_0}$ が安定でないと仮定すると,

$\varepsilon_0 > 0$, (1) の解の列 $\{u_j(t)\}$ 及び $\{t_j\} \subset (0,\infty)$ が存在して

$$\operatorname{dist}(u_j(0), \mathcal{O}_{\omega_0}) \to 0, \tag{12}$$

$$\operatorname{dist}(u_j(t_j), \mathcal{O}_{\omega_0}) = \varepsilon_0. \tag{13}$$

ここで, $\operatorname{dist}(v, \mathcal{O}_\omega) = \inf\{\|v - e^{i\theta}\varphi_\omega(\cdot + y) : \theta, y \in \mathbb{R}\}$ とおいた. このとき, S_ω は (1) の保存量だから, (12) より, $S_{\omega_0}(u_j(t_j)) = S_{\omega_0}(u_j(0)) \to S_{\omega_0}(\varphi_{\omega_0}) = d(\omega_0)$. また, 補題 9 と (12) より (必要なら部分列をとることにより), $\tilde{S}(u_j(t_j)) \to d(\omega_0)$. このとき, $I_{\omega_0}(u_j(t_j)) \to 0$ だから, 命題 6 より, 適当な部分列に対して, $\operatorname{dist}(u_{j'}(t_{j'}), \mathcal{O}_{\omega_0}) \to 0$ となるが, これは (13) と矛盾する. 故に, $e^{i\omega_0 t}\varphi_{\omega_0}$ は安定であることが示された. □

参考文献

[1] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, and H. Holden, Solvable models in quantum mechanics, 2nd ed., with an appendix by Pavel Exner, AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[2] H. Berestycki and T. Cazenave, Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris. **293** (1981) 489–492.

[3] H. Brezis and E. H. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983) 486–490.

[4] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger equations, Courant Lecture Notes in Mathematics 10, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[5] T. Cazenave and P. L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, Comm. Math. Phys. **85** (1982), 549–561.

[6] F.F.G. Della Casa and A. Sacchetti, Stationary states for non linear one-dimensional Schrödinger equations with singular potential, Physica D **219** (2006), 60–68.

[7] R. Fukuizumi and L. Jeanjean, Stability of standing waves for a nonlinear Schrödinger equation with a repulsive Dirac delta potential, in preparation.

[8] R. Fukuizumi, M. Ohta, and T. Ozawa, Nonlinear Schrödinger equation with a point defect, preprint.

[9] R. H. Goodman, P. J. Holmes, and M. I. Weinstein, Strong NLS soliton-defect interactions, Physica D **192** (2004), 215–248.

[10] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I, J. Funct. Anal. **74** (1987) 160–197.

[11] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II, J. Funct. Anal. **94** (1990) 308–348.

[12] M. Ohta, Stability and instability of standing waves for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity, Kodai Math. J. **18** (1995) 68–74.

[13] J. Shatah, Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations, Comm. Math. Phys. **91** (1983) 313–327.

[14] J. Shatah and W. Strauss, Instability of nonlinear bound states, Comm. Math. Phys. **100** (1985) 173–190.