

表 2.11 同一問題の正答率（14 年度 vs. 13 年度同一校 57 校 40 題）

14 年		13 年		14 年		13 年		14 年		13 年	
問題	成績	問題	成績	問題	成績	問題	成績	問題	成績	問題	成績
A2	81.5*	A1	77.8	B6	57.1	D6	58.2	C9	24.0*	C10	19.8
A4	61.5	A4	69.4*	B7	61.6	C7	59.0	C10	24.6	D10	29.2*
A5	62.3	B7	64.6	B8	27.6	B8	31.0	D1	80.3	B1	80.4
A6	73.5	A6	76.4	B9	31.5	B9	34.7	D2	76.7	B2	79.0
A7	48.9	D5	50.3	B10	35.4*	D11	26.6	D3	73.2	C4	72.6
A8	46.4	A7	48.8	B11	18.4*	B11	8.8	D4	63.3	D2	70.7*
A9	33.2	B10	35.9	C1	88.4*	C1	83.3	D5	59.0	A5	63.9*
A10	46.6*	A11	28.1	C2	56.9	D4	60.1	D7	56.0	A8	52.0
A11	18.8*	A9	9.8	C3	65.8	B5	70.8*	D8	46.9	C8	46.6
B1	80.7	D1	86.4*	C4	74.1*	A2	68.1	D9	31.2	A10	35.4*
B2	77.4	C3	76.5	C5	63.4	B4	65.3	D10	18.5	D9	23.8*
B3	63.5	D3	69.2*	C6	63.1	A3	61.1	D11	14.6	C11	14.3
B4	71.6	C5	68.1	C7	45.8	C2	54.3*				
B5	64.6	B3	67.6	C8	36.5	D8	33.9	平均	53.1	平均	53.3

（注）成績（％）の右肩の＊印は、14 年度と 13 年度との比較で成績間に統計的に有意差がある事を示す。

問題 9～11 は準正答も正答率に含めた。

同一 57 校の両年度の問題別成績の比較をすると、統計的有意差検定の結果（平均値の差の検定）で 14 年度の成績が 13 年度よりよかった問題は、14 年度の問題番号で表すと A2, A10, A11, B10, B11, C1, C4, C9 の 8 題である。反対に 14 年度の成績が 13 年度の成績より悪かった問題は、A4, B1, B3, C3, C7, C10, D4, D5, D9, D10 の 10 題である。他の 22 題は、両調査の成績に有意差が認められなかった。

統計的な有意差検定の結果で今年度の成績と比較して整理すると、

14 年度の成績が	良くなった	変わらない	悪くなった
13 年度の成績より	8 題 (20%)	22 題 (55%)	10 題 (25%)

であった。

また、平均成績では 14 年度 53.1％, 13 年度 53.3％で、平均成績の間には統計的な有意差はなかった。

(2) 12～14 年度共通問題の比較

つぎに、今年度調査校のうちの 42 校は過去 3 年間（14 年, 13 年, 12 年）継続して本学力

調査に参加していた。これらの高校で3年間の共通36題の正答率を年度別に再計算して問題ごとの成績を比較した。

その同一42校の生徒数は以下の通りである。

13年度：3,069名（A：780名，B：770名，C：764名，D：755名）

12年度：3,125名（A：792名，B：794名，C：774名，D：765名）

11年度：2,874名（A：734名，B：716名，C：715名，D：709名）

問題別に、今年度（14年度）の成績と13年度，12年度の成績との差を示したのが表2.12である。

表2.12 同一校同一問題の成績比較（12～14年度共通42校36題）

問題	14年	13年	12年	問題	14年	13年	12年	問題	13年	12年	11年
A2	82.1	3.3	2.0	B5	65.5	-1.3	-0.6	C10	24.9	-2.6	-3.7
A4	62.6	-6.5*	-2.7	B6	57.3	-1.2	-5.3*	D1	80.0	-1.1	-1.3
A5	62.4	-3.2	-2.2	B7	60.4	2.3	5.2*	D2	75.4	-2.6	-3.5
A6	72.9	-4.5*	1.0	B8	27.0	-2.7	-2.4	D3	73.0	0.9	-3.7
A7	48.8	-1.0	-4.4	B9	30.0	-5.6*	1.0	D4	64.1	-6.7*	-7.3*
A8	47.6	-0.1	6.3*	B10	34.2	8.3*	-0.6	D5	56.6	-6.4*	-2.6
A9	35.1	-0.9	1.3	C2	56.8	-3.8	-9.1*	D7	54.3	1.8	0.7
A10	48.6	21.8*	10.8*	C3	65.2	-6.7*	-3.5	D8	46.1	1.4	-5.8*
A11	18.2	9.3*	-5.8*	C5	62.7	-2.5	-1.2	D9	30.2	-4.8*	-4.0
B1	81.2	-4.8*	-4.5*	C6	62.8	0.6	-0.9	D11	14.3	0.9	-7.6*
B2	76.5	-1.2	1.3	C7	45.9	-6.8*	1.6				
B3	60.5	-8.6*	-9.4*	C8	34.9	2.4	3.3				
B4	69.0	-0.3	-4.4	C9	22.6	3.0	-5.2*	平均	53.0	53.9	54.9

（注）成績（％）の右肩の*印は、14年度と過年度との比較で成績間に統計的に有意差（成績の差の有意差検定）がある事を示す。

成績の推移を調べる目的で、14年度の成績との差によって、その推移を示した表であるが、例えば、問題A4で今年度の成績は62.6％で、13年度の成績（69.1％）との差は-6.5％，11年度（65.3％）との差は-2.7％となって、いずれの年度も14年度より下がっているが、有意差検定の結果では、13年度に統計的な差（有意水準5％）が認められるが、12年では差がないことを示している。

平均成績の有意差検定結果では、14年度の成績が、13年度の成績と比較してA10，A11，B10の3題で高くなっているが、A4，A6，B1，B3，B9，C3，C7，D4，D5，D9の10題では成績が

下がっていた。

また、14年度の成績が、A8, A10, B7の3題は12年度より高く、A11, B1, B3, B6, C2, C9, D4, D8, D11の9題で下がっていた。

36題全体の平均成績では14年度の53.0%に対して、13年度の成績は53.9%、12年度は54.9%であり、有意差がみられなかった。

統計的な有意差検定の結果で今年度の成績と比較して整理すると、

今年度の成績が	よくなった	変わらない	悪くなった
13年度より	3題 (8%)	23題 (64%)	10題 (28%)
12年度より	3題 (8%)	24題 (67%)	9題 (25%)

であった。上の表から分かるように、14年度の成績と比較して13年度は23題 (64%)、12年度は24題 (67%)の問題の成績に変化がなかったことを示している。

(3) 11～14年度共通問題の比較

また、今回調査校のうちの31校は過去4年間継続して本調査に参加していた。これらの高校で4年間の共通35題の正答率を年度別に再計算して問題ごとの成績を比較した。

その31校全体の生徒数は以下の通りである。

14年度：2,348名 (A：606名, B：590名, C：579名, D：573名)

13年度：2,404名 (A：610名, B：607名, C：601名, D：586名)

12年度：2,102名 (A：543名, B：526名, C：516名, D：517名)

11年度：2,258名 (A：577名, B：565名, C：568名, D：548名)

問題別に、14年度の成績と12年、11年、10年の成績との差を示したのが表2.13である。

表2.13 同一校同一問題の成績比較 (14～11年度同一31校35題)

問題	14年 成績	13年 度	12年 度	11年 度	問題	14年 成績	13年 度	12年 度	11年 度	問題	14年 成績	13年 度	12年 度	11年 度
A2	82.1	4.2	0.0	-0.7	B4	69.8	1.4	-6.4*	-2.6	C8	33.5	0.1	2.6	-0.5
A4	62.6	-5.6*	-7.7*	-3.4	B5	66.3	-0.6	0.2	1.2	C10	24.0	-1.8	-3.8	-5.6*
A5	62.4	-2.3	-2.5	-4.1-	B6	58.3	1.5	-2.8	-3.1	D1	78.2	-2.9	-1.8	-3.0
A6	72.9	-5.1*	-1.6	-3.7	B7	61.5	3.6	1.9	4.0	D2	76.4	-0.5	-1.5	-1.8
A7	48.8	0.7	-2.2	-6.7*	B8	28.1	-0.1	0.4	0.4	D3	70.9	-0.8	-6.1*	-0.4
A8	47.6	-0.3	-3.9	-6.6*	B9	29.7	-4.6	-2.8	-4.3	D4	61.1	-7.7*	10.1*	-5.3
A9	35.1	-0.3	1.8	-4.0	B10	35.1	10.2*	1.2	0.1	D5	55.0	-9.4*	-11*	-9.1*
A10	48.6	22.0*	9.1*	4.6	C2	55.8	-4.3	-8.1*	-8.6*	D7	53.1	0.3	1.6	-2.5
A11	18.2	9.3*	-2.0	9.4*	C3	65.8	-6.4*	-3.4	-2.6	D8	43.8	-0.6	-7.3*	-4.2

B1	82.2	-2.8	-2.0	-4.6*	C5	59.4	-3.5	-4.0	-8.6*	D9	27.7	-6.6*	-8.2*	-10.9*
B2	77.3	-0.7	-1.8	-1.3	C6	59.2	-3.4	-10.6*	-7.2*	D11	12.7	-0.9	-8.8*	-6.2*
B3	61.9	-7.9*	-5.9*	-10.6*	C7	45.6	-6.8*	1.1	3.0	平均	53.4	54.4	56.5*	56.6*

(注)問題別の13年、12年、11年の数値は14年度の成績との差(正の数値は14年度よりもその数値だけ低く、負の数値はその数値だけ高い)を表す。数値の肩に*印のものは今回の成績との間に有意差があることを示す。

表2.13は、14年度の成績と過年度の成績の推移を示した表であるが、例えば問題A2では14年度の成績が82.1%で、13年度の成績(77.9%)との差は4.2%、12年度(82.1%)との差は0.0%で、11年度(82.8%)との差は-0.7%であることを示している。そして、14年度と過年度に有意差が有るのは数値の肩に*印が付加されている。

14年度の成績が、13年度の成績と比較してA4、A6、B3、C3、C7、D4、D5、D9の8題で低く、A10、A11、B10の3題で高くなっていた。また、12年度の成績と比較してA4、B3、B4、C2、C6、D3、D4、D5、D8、D9、D11の11題で低く、A10の1題で高かった。さらに、11年度の成績と比較してA7、A8、B1、B3、C2、C5、C6、C10、D5、D9、D11の11題で低く、A11の1題で高かった。

各年度の平均成績では、14年度53.4%、13年度54.4%、12年度56.5%、10年度56.6%であったが、14年度との間に12年度、11年度に有意差はあった。

今年度の各問成績と過年度の成績との間の統計的な有意差検定の結果で、今年度の成績と比較して整理すると、

14年度の成績が	上がった	変わらない	下がった
13年度より	3題(9%)	24題(68%)	8題(23%)
12年度より	1題(3%)	23題(66%)	11題(31%)
11年度より	1題(3%)	23題(66%)	11題(31%)

14年度の成績が13年度、12年度、11年度の成績より統計的に良くなったのは1～2題であった。反対に、今年度の成績が過年度の成績より悪くなったのは、それぞれ8題、11題、11題であった。

(4) 06～14年度共通問題の比較

さらに、06～14年度の同一11校で共通問題は20題の分析を行った。

その校全体の生徒数は、

14年度：975名、13年度：890名、12年度：868名、11年度：949名、10年度：723名、09年度：814名、08年度：842名、07年度：892名、06年度：892名であった。問題別に今年度の成績と過年度との成績差を表したのが、表2.15である。

表 2.14 今年度の成績と過年度との成績差：有意差検定

問題	14 年	13 年	12 年	11 年	10 年	09 年	08 年	07 年	06 年
A4	61.7	-4.1	-5.7	-5.2	-2.2	-6.3	1.5	-8.0	-7.4
A5	59.8	-4.8	-5.2	-9.1*	-1.1	-0.7	1.5	-6.0	-4.5
A7	44.9	-4.0	-4.0	-13.8*	-3.4	-6.6	-8.2	-6.9	-5.6
B1	82.8	-2.3	1.6	-1.0	1.1	0.3	6.7	2.3	-4.9
B2	77.7	0.8	2.5	4.9	-1.7	-2.3	-0.1	2.9	-4.5
B3	59.7	-9.5*	-8.9*	-9.2*	-11.4*	-9.2*	-13.8*	-16.3*	-14.8*
B4	69.7	5.0	-3.6	-2.2	-2.0	4.2	0.3	-1.8	-0.5
B5	70.2	8.3	3.4	7.6	2.0	3.7	4.2	5.5	3.5
B7	62.2	4.3	7.0	7.8	11.6*	8.4	6.6	5.0	7.6
B8	29.8	1.1	1.8	-0.4	-4.4	-5.2	-5.5	-4.6	-1.5
B9	31.9	-0.8	2.9	1.5	0.8	-3.5	-7.6	-3.8	-0.8
C2	59.2	-4.1	-9.9*	-1.7	-10.9*	-7.5	-5.7	-0.4	-8.7
C6	62.5	-1.5	-4.5	-4.2	-3.3	1.5	-3.2	6.2	-10.9*
C7	44.6	-12.4*	2.1	2.9	-10.4*	2.8	-6.1	-9.7*	3.6
C8	40.4	4.7	8.1	0.8	8.7	9.0*	4.2	8.4	4.2
C10	26.7	-1.8	-4.7	-3.9	-7.0	-3.3	-6.5	-11.9*	-18.3*
D1	76.8	-1.7	-2.6	-4.5	-5.0	-5.6	-6.3	-6.6	-10.1*
D4	63.9	-4.9	-2.9	-2.9	3.6	-2.6	-6.9	-11.2*	-1.4
D5	57.7	-9.0*	-5.6	-12.1*	-6.2	-6.2	-3.0	-3.3	-6.4
D8	41.1	-1.0	-10.8*	-5.3	-8.1	-14.1*	0.0	-7.3	-10.7*
平均	56.2	-1.9	-2.0	-2.5	-2.5	-2.2	-2.4	-3.4	-4.6*

(注)今年度(14年度)の成績との差で、-の値は今年度の成績が過年度に比べて下がっている問題を示す。また、数値の肩に*印のある問題は有意水準5%で今年度の成績と有意差が有る問題を示す。

問題別にみて、B3の今年度の成績は過年度より有意に低下していることが分かる。

B3. 関数 f のグラフ上で、 $(a, 1)$ がグラフの変曲点になるとき、次のどれが成り立ちますか。

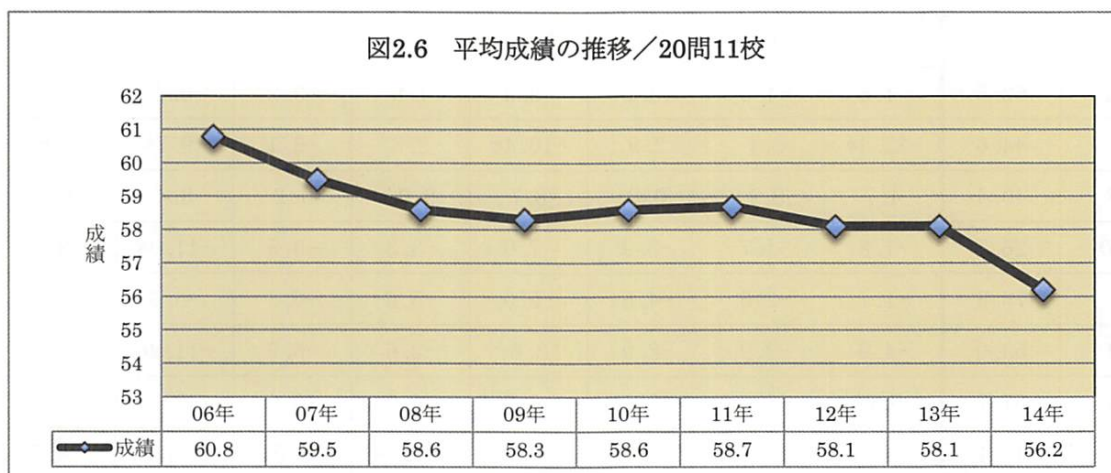
(ア) $f(a) = 0$ (イ) $f'(a) = 0$ (ウ) $f''(a) = 0$ (エ) f' は、 $x=a$ で極大値か極小値をとる。 (オ) f'' は、 $x=a$ で極小値をとる。

関数のグラフの変曲点の意味と性質を問う問題で、正答は(ウ)である。今年度の正答率は59.7%で、過年度より9～16%も下がっていた。図2.4はその推移を示しているが、今年度の正答率は59.7%で、過年度より9～16%も下がっていて有意差が認められた。



また、今年度の平均成績では、06年度と有意な差がみられたが、その他の年度とは有意差が認められなかった。

各年次の平均成績をグラフに表したのが、図2.6のようになる。



今年度の各問成績と過年度の成績との間の統計的な有意差検定の結果で、今年度の成績と比較して整理すると、

14年度の成績が	上がった	変わらない	下がった
13年度より	0題 (0%)	17題 (85%)	3題 (15%)
12年度より	0題 (0%)	17題 (85%)	3題 (15%)
11年度より	0題 (0%)	16題 (80%)	4題 (20%)
10年度より	1題 (5%)	16題 (80%)	3題 (15%)
09年度より	1題 (5%)	17題 (85%)	2題 (3%)
08年度より	0題 (0%)	19題 (95%)	1題 (5%)
07年度より	0題 (0%)	16題 (80%)	4題 (20%)
06年度より	0題 (0%)	15題 (75%)	5題 (25%)

14年度の成績が統計的に良くなったのは10年度、09年度で各1題、今年度の成績が過年度の成績より悪くなったのは、1～5題であった。そのうち、問題B3は、過年度の成績よりいずれも有意に下がっていた。

(5) 年度ごとの共通問題の平均成績

今年度(14年)の成績と過年度の成績で同一校共通問題について平均成績を算出したのが、表2.15である。

表 2.15 年度別比較の平均成績 (%)

項 目		年次別平均成績 (上段：平均正答率、 下段：生徒数)									
比較年次	問題数 (学校数)	14 年	13 年	12 年	11 年	10 年	09 年	08 年	07 年	06 年	05 年
14～13年 共通	40 題 (57 校)	53.1 3,984	53.3 4,004								
14～12年 共通	36 題 (42 校)	53.0 3,069	53.9 3,125	54.9 2,874							
14～11年 共通	35 題 (31 校)	53.4 2,348	54.4 2,404	56.5* 2,102	56.6* 2,258						
14～10年 共通	32 題 (23 校)	55.8 1,908	56.2 1,868	58.9 1,618	58.0 1,805	57.8 1,488					
14～09年 共通	31 題 (18 校)	57.4 1,509	57.3 1,409	60.3 1,320	59.2 1,431	57.6 1,160	56.5 1,306				
14～08年 共通	26 題 (16 校)	57.2 1,327	57.5 1,202	60.8 1,194	59.1 1,287	58.6 1,004	57.7 1,147	58.7 1,153			
14～07年 共通	25 題 (14 校)	56.5 1,142	56.9 1,085	59.3 1,015	58.2 1,110	57.9 856	57.7 962	58.6 995	59.5 1,028		
14～06年 共通	20 題 (11 校)	56.2 975	58.1 890	58.1 868	58.7 949	58.6 723	58.3 814	58.6 842	59.5 892	60.8* 786	
14～05年 共通	15 題 (9 校)	55.6 885	56.4 809	57.7 771	57.8 811	57.4 617	57.6 661	56.0 707	59.2 741	60.0 637	61.9* 364

(注) *印の成績は今年度の成績と比べて有意差が認められた年度を表す

表 2.15 では、今年度(14年)と過年度の平均成績と比較して、14～05年度では05年度の成績、14～06年度では06年度の成績、14～11年度では11年度と12年度の成績が14年度の

成績より有意に良くなっていた。

2.4.2 IEA 調査との比較

過去の大規模調査として、IEA が実施した SIMS（第 2 回国際数学教育調査）がある。その調査問題の中から基礎・基本問題を昨年度に続き 32 題選択して調査した。SIMS 調査の母集団の定義は、「高校 3 年生で数学Ⅲを 5 単位以上履修している生徒」いわゆる当時の理系進学希望者集団であった。今回の調査対象は、高校 3 年で数学Ⅲと数学 C を履修している生徒であるから比較可能であると判断して、その結果を表 2.16 に表した。

表 2.16 過去の調査との比較／今回 vs. SIMS

問 題	テスト A			テスト B			テスト C			テスト D		
	今回 成績	SIMS 成績	有意 差	今回 成績	SIMS 成績	有意 差	今回 成績	SIMS 成績	有意 差	今回 成績	SIMS 成績	有意 差
1	86.4	75.4	*	81.7	67.4	*	87.4	86.8	ns	79.8	73.8	*
2	83.0	75.0	*	78.2	74.6	*	58.0	56.8	ns	77.7	63.4	*
3	62.8	16.2	*	65.6	64.3	ns	67.1	61.8	*	73.5	74.0	sims
4	63.5	50.0	*	71.4	66.2	*	75.2	62.9	*	64.9	58.6	*
5	65.3	55.5	*	66.6	55.8	*	64.3	68.9	sims	60.8	55.3	*
6	74.6	68.1	*	58.1	57.1	ns	66.9	58.6	*	57.5	53.1	*
7	52.6	43.8	*	63.4	58.0	*	45.3	44.8	ns	55.8	55.0	ns
8	49.9	62.7	sims	31.8	38.1	sims	37.2	30.1	*	48.0	42.3	*

(注) 有意差検定の結果：5%有意水準で、ns:両者に有意差なし、sims:今回調査より SIMS 調査の成績がよい、*:今回調査の成績が sims 成績よりよい。

今回実施した各テストの 1～8 題は、1980 年度 SIMS 調査（第 2 回国際数学教育調査）で使用了問題からの出題で、問題ごとに今回の成績と当時高校 3 年理数系生徒の成績（正答率）を表で比較した。

各問の成績間の有意差検定を行って結果をまとめると、今回の正答率が SIMS 調査のそれよりよかったのはテスト A では問題 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 の 7 題、テスト B では問題 1, 2, 4, 5, 7 の 5 題、テスト C では問題 3, 4, 6, 8 の 4 題、テスト D では問題 1, 2, 4, 5, 7, 8 の 6 題であった。反対に、SIMS 調査の方の成績が今回よりよかったのはテスト A の問題 8、テスト B の問題 8、テスト C の問題 5 であった。

全体 32 題中、今回調査がよかったのは 22 題(68.8%)、SIMS 調査の方がよかったのは 3 題(9.4%)、両調査に有意差がみられなかったのは 7 題(21.8%)であった。

次の表 2.16 は、各年度の報告書から SIMS 調査(1980 年度)の結果と比較したものである。

表 2.17 SIMS 調査との比較

比較対象	理大調査が上	同程度	SIMS 調査が上	調査問題数
14 年度調査	22 (69%)	6 (19%)	4 (12%)	32
13 年度調査	17 (57%)	9 (30%)	4 (13%)	30
12 年度調査	22 (70%)	5 (15%)	5 (15%)	32
11 年度調査	21 (66%)	8 (25%)	3 (9%)	32
10 年度調査	21 (66%)	8 (25%)	3 (9%)	32
09 年度調査	19 (59%)	11 (34%)	2 (6%)	32
08 年度調査	19 (59%)	10 (31%)	3 (9%)	32
07 年度調査	19 (59%)	7 (22%)	6 (19%)	32
06 年度調査	18 (56%)	9 (28%)	5 (16%)	32
05 年度調査	25 (89%)	3 (11%)	0 (0%)	28

(注) 表中の数値は問題数。問題ごとに SIMS と本調査の成績を比較した結果、その成績の有意差検定を行い「本調査が上」、「同程度」、「SIMS 調査が上」とた。() 内の数値は調査問題全体に対する割合(%)である。

05～14 年度通算して全体 314 題では、理大調査の成績がよいのは 203 題 (64.7%)、SIMS 調査の成績が良いのは 35 題 (11.1%)、両調査の成績に有意差がないのは 76 題 (24.2%) であった。相対的に、1980 年代の国際調査結果に比べて、理大調査結果の成績が SIMS の成績より向上していると見ることができる。すなわち、標本抽出の違いがあることを考慮しても、SIMS 当時の高校 3 年生と比べて、今回の生徒の基礎学力成績は劣っていないと言える。

参考までに、SIMS 調査は、当時の「数学Ⅲ」履修生 (5 単位以上) の中から 207 校 7,982 人の標本抽出により 1980 年 11 月に実施された。数学問題は 17 題を 1 セットにして 8 セット (合計 136 題) を用意し、各クラスを 4 等分して任意の 2 セット (計 34 題) を生徒個人に与えて調査した。

SIMS 調査では、各問題を内容と目標の 2 次元に分類して分析していた。教育的なねらいとした目標では、「計算」、「理解」、「応用」、「分析」の 4 領域である。要約すれば、

「計算」：事実、用語に関する知識やアルゴリズムを実行する能力等をみる

「理解」：あるやり方から別のやり方へ問題を変換する能力等をみる

「応用」：決まりきった手順で問題を解く能力等をみる

「分析」：決まりきった手順ではできない応用を要求する能力等をみる

問題からの出題とみていた。

それに従って、今回の問題を分類し整理すると、表 2.17 になる。

表 2.18 内容・目標からの分類

領域	内容・目標	問 題	今回	SIMS
内 容	数の体系	A2, A3, B1, C4, 4 題	75.7	55.4
	代数	A6, B5, C3, C6, C8, D4 6 題	62.9	55.5
	幾何	A4, A7, B2, B4, C7, D3 6 題	64.1	58.9
	解析	A1, A8, B3, B6, B7, B8, C2, C5, D1, D2, D5, D7, D8 13 題	61.5	59.3
	確率・統計	A5, C1, D6 3 題	70.1	65.1
目 標	計算	A1, B2, B3, C6, C7, D1 6 題	70.4	65.3
	理解	A3, A6, A7, B5, B6, B8, C2, D3, D6, D8 10 題	58.4	50.5
	応用	A2, A4, A5, B1, B4, B7, C1, C3, C4, C5, C8, D2, D5 13 題	69.1	61.6
	分析	A8, D4, D7 3 題	56.9	58.8
		全 体 32 題	64.8	58.6

内容領域別では、今回と SIMS の平均成績の差は、「数の体系」で 20.3%、「代数」で 7.4%、「幾何」で 5.2%、「解析」で 2.2%、「確率・統計」で 5.0%となり、いずれも今回が勝っていた。また、目標領域別では、今回と SIMS の平均成績の差は、「計算」で 5.1%、「理解」で 7.9%、「応用」で 6.1%、「分析」で-1.9%となり、全体では 6.2%となって今回の成績が勝っていた。他の領域に比べて「分析」領域での差はなく、この領域では成績の伸びはなかったことになる。

2.5 問題分析

資料Ⅱをもとに、問題別成績を科目別に表 2.19 にまとめた。

表 2.19 問題別正答率

科目	正答率（問題番号）	平均
数学Ⅰ	A9, B2, B11, C1, C3, D4, D6, D9 7 題	55.8
数学 A	A5, C8 2 題	51.3
数学Ⅱ	A2, A4, A6, A10, B8, C7, C10, D1, D7, D11 9 題	52.6
数学 B	A11, B1, B9, C9, C11, D3 6 題	48.8
数学Ⅲ	A1, A3, A7, A8, B3, B4, B5, B6, B7, B10, C2, C4, C5, C6, D2, D5, D8, D10 17 題	60.2

今年度の高校生の基礎学力調査の結果が、東京理科大学数学教育研究会研究会（1月24日（土）15：00～17：00）で例年通り報告された。発表者は、

全体概要：澤田利夫（東京理大）、

数学Ⅰ，数学Ⅱの内容：小林 徹也（茨城県立竜ヶ崎第一高等学校）、

数学Ⅲの内容：半田 真（東京女学館中学・高等学校）、

数学Ⅳの内容：鈴木清夫（筑波大学附属駒場中高等学校）、

背理法について：池田文男（東京理大）、

IRTによる調査結果の分析：渡邊博史（NTT データ CCS）

の各委員が分担して行った。

そのうち、各科目に内容についての分析概要を以下に述べる。

2.5.1 数学Ⅰ，数学Ⅱについて

今回の調査において、数学Ⅰ 数学Ⅱ問題の結果を分析した結果、次のことがいえる。

1 問題数について

全44問中、数学Ⅰ 数学Ⅱの問題は10問であり、その全体に占める割合は約22%であった。やや少ない感もあるが、理数系高校生への調査であることから、数学Ⅲ 数学Ⅳなどに重みを置いたためといえる。

2 学習指導要領の変更による点数の変化

今回調査された生徒達は、平成21年3月告示の学習指導要領による教育課程で学習してきた最初の生徒である。その生徒達とそれ以前の生徒達との違いに着目して分析する。

（1） 以前から長く調査されてきた問題について

今回を除く9回の調査において今回も出題された問題でかつ複数回調査された問題は7題であり、それらの平均点と今回の点数を比較したものが次の表である。

問題	科目	内 容	今回の 正答率	これまでの 平均正答率	[今回]－ [これまで]	これまでの 調査回数
A5	数Ⅱ	場合の数と確率	65.3	63.8	1.5	9
A9	数Ⅰ	三角比	35.6	34.6	1.0	5
B2	数Ⅰ	三角比	78.2	79.5	-1.3	9
C3	数Ⅰ	二次関数	67.1	67.5	-0.4	6
C8	数Ⅱ	整数の性質	37.2	32.1	5.2	8
D4	数Ⅰ	二次関数	64.9	68.2	-3.2	9
D9	数Ⅰ	三角比	35.0	36.6	-1.6	7

このうち、C8、D4以外の問題は大きくても1.6ポイントの差であり、これまでと同程度といえる。

D4については、3.3ポイント落ちている。ただし今回の64.9ポイント回る点数はこれまでNOWⅡ（62.4）、NOWⅦ（64.7）の2回あることから、新学習指導要領の悪影響とは考えにくい。今後変化に注意したい問題である。

C8については（3）で言及する。

（2）他年度との平均点の比較

学習指導要領が変わったことによる平均点の変化を見るため、過去3回と今回の共通問題における平均正答率を比較すると次のようになる。

比較対照 調査	共通問題数	過去の平均 正答率	今回の平均 正答率
NOWⅨ	9	52.6	54.6
NOWⅧ	7	54.3	54.8
NOWⅦ	7	54.1	54.8

（3）新課程に入った内容の問題について

新課程となり、数学Ⅰに「データの分析」、数学Ⅱに「整数の性質」が入った。それらに関わる問題C1、C8、D6について分析する。

① 問題C1について

問題C1は「平均点」に関わる問題である。平均は「平均＝合計÷個数」として、相加平均を最初に小学5年生で学ぶ（東京書籍・新しい算数・p.86）。また、数学Ⅰでは例えば次のように相加平均を学ぶ。

n 個の値からなるデータがある。このデータの個々の値を次のように表す。

$x_1, x_2, \dots, x_n$

これらの総和を n で割った値をデータの平均値といい、記号 $\bar{x}$ で表す。

$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ （東京書籍・新編数学Ⅰ p.142）

いずれも個々のデータの値の総和から平均を求める式である。また、数学Ⅰでは、平均は分散、相関係数を求める際に用いられるなど重要な指標である。ここで、調査問題ではデータの個数と平均を掛けてデータの総和を求めるなどの必要があり、さらに求める公式を複数回用いる。そのことが正答率が90パーセントを超えない(87.4)の理由と考えられる。

正答率を比較すると、今年度は87.4、昨年は82.4であり、昨年より5ポイント高い。したがって数学Ⅰで指導された好影響がみられるといえる。なお、本問題はSIMSでも出題されており正答率は86.8であった。

② 問題C8について

問題D8は整数の剰余に関する問題である。これまで8回出題されており、その際は数学A「集合と論理」に分類されてきた。今回の学習指導要領から数学A「整数の性質」に位置づけられた。

今回の正答率は37.2、これまで8回の出題における正答率は30程度で推移し、平均32.1、SIMS 30.1である。また、今回はこれまでで最も高い正答率である。このことから、「整数の性質」が数学Aに位置づけられた好影響がみられるといえる。

③ 問題D6について

問題D6は平均と標準偏差に関わる問題である。これまでNOWにおける調査はないため、新学習指導要領の影響の考察はできない。なお、正答率は今年度57.5、SIMS 53.1であり、今年度の方が4.1ポイント高い。

(4) まとめ

(1)～(3)について次のことがいえる。(1)において、これまでNOWにおいて長く調査されてきた問題別の平均点と今回を比較すると同程度である。また、(2)における最近3カ年との平均正答率の比較では差はほとんどない。さらに(3)における新課程に入った問題については、D6については今回初めての調査であるため比較はできないが、他の2問については正答率が上昇しており、新指導要領の好影響が見られる。

以上の事から、学習指導要領が変わったことによる影響として、旧課程と共通する内容については影響が見られず、新しく入った内容については好影響が見られるといえる。

2.5.2 数学Ⅱ、数学Bについて

(1) 2014年度調査における数学Ⅱ・B

今回の調査問題における数学Ⅱ・Bの出題は全部で16題。その内訳は、三角関数から2題、指数・対数関数から3題、図形と方程式から2題、微分・積分から3題、数列から2題、ベクトルから4題であった。

このうち、ベクトルは4題中3題が記述式の問題である一方、微分・積分はすべて過去のSIMS問題からの出題となっていた。また、数列の2題は同じ漸化式に関する問だが1つはB1として出題したSIMSの選択肢問題、もう一つはC11としてSIMSの問題を記述式にして出題した問題であった。

以下、前年度調査の正答率との比較、および数列の2題に注目して数学Ⅱ・Bの出題に関して気になった点を述べていく。

(2) 2014年度調査の正答率と2013年度調査の正答率の比較

2014年度調査での正答率と2013年度調査での正答率で成績の下がった問題としてA4およびC7に注目した。

A4は初年度調査から毎年出題している三角関数の値を求める問である。正答率70%前後、自

信率 50%前後を推移してきたが、今回の調査では正答率 63.5%、自信率 45.2%と両方とも過去最低の結果であった。新学習指導要領で扱いに変化があった分野でもないため原因がはっきりしないが、今回だけの現象なのだろうか？今後の調査の様子に注目していきたい。

C7 は第 2 回 2006 年度調査から毎年出題している「2 直線の交点を通る直線の方程式」に関する問である。2012 年度、2011 年度調査では正答率が 43%前後だったものが、前年度 2013 年度調査では 52.7%と過去 2 番目によい正答率を示していた。しかし今回 45.3%の正答率に逆戻りしてしまった。過去の調査でも自信率は低く 10%代を推移している問題である。「2 直線の交点を通る直線の方程式」の問題は良くある典型的な問に思えるが、意外に検定教科書での扱いは薄いようだ。「直線 $(2k+1)x + (k+4)y - k + 3 = 0$ は k の値に関係なく定点を通る。その定点を求めよ。」といった類の問題が章末問題として扱われているが、そこから「2 直線の交点を通る直線の方程式」だということを指導するような工夫が高等学校の先生方には求められているのであろう。

A10 は 2009 年度調査から毎年出題しているが、昨年度調査で正答率が大幅にダウンした問題である。それが今回の調査では過去最高正答率 49.3%となった。昨年度調査の分析では「指数・対数、特に対数に対して数としての感覚が乏しいように感じるだけに教育現場での丁寧な指導が求められる。」と指摘したが、引き続きそうした指導が求められる。今後の成績推移に注目したい問題である。

A11, C9 は共にベクトルの問題で今回共に昨年度の正答率を 10%前後上回っている。とはいえ、A11 の正答率 21.4%、自信率 6.8%、C9 の正答率 28.1%、自信率 18.8%と決して高いわけではない。昨年度の分析でも指摘したようにベクトルの学習で最も大切な部分は、「一次結合」と「位置ベクトル」に関する概念理解である。

A11 は $\vec{a} + \vec{b}$ を $\vec{c}$ とおけば教科書の例題によくある問に帰着する。その結果を丸暗記しているだけでは「一次結合」の概念理解にはならないであろう。点の動きを意識した理解を促す指導を工夫することが求められる。

C9 は始点を A にそろえて変形していけば解ける問いである。この「始点をそろえる」ことが「位置ベクトル」の概念理解につながるよう指導したい。また、始点を A にそろえることで $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の 2 つのベクトルが一次独立だからその 2 つの一次結合であらわされた $\overrightarrow{AP}$ ベクトルを調べることで点 P の位置が分かるように指導していきたい。

(3) 問題 B1 と C11 の比較

まず B1 だが初年度調査から毎年出題している漸化式の問題である。見かけは漸化式だが、その内容は階差が奇数になる数列の一般項を求める問題である。奇数の和 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ を求めるだけなので、中学受験を目指して勉強している小学生の中には n^2 と答えられる者がいてもおかしくない問題だ。それゆえ、B1 として出題した問題の正答率は 81.7%と良いできである。これは教師評価 59.6%をも上回る。しかし、自信率が 59.5%と正答率に対して開きがあり、教師評価とほぼ等しい。

一方 C11 としての正答率を見ると 53.1%と B1 の正答率を大きく下回る。B1 の自信率にほぼ等しい、と言いたいですがそれすら下回っている。漸化式は授業であまり扱う時間がないのかもしれない。あるいは、もっと複雑な漸化式を中心に指導するあまり、こうした基本的な漸化式の解法の指導がおろそかになっているのであろうか？B1 も C11 も式の意味を理解し、自信を持って正解できるよう指導していきたい問題である。

2.5.3 数学Ⅲ、数学Cについて

数学Ⅲの問題は 18 題あり、このうち 7 題は 05 年、2 題は 06 年、1 題は 07 年、3 題は 09 年、1 題は 11 年、2 題は 13 年から継続して出題されており、今回新たに出題されたものは 2 題である。各問題の正答率および SIMS（1980 年実施）の結果は次のとおりである。

1980 実施

問題	科目	内容		14 正答率	13 成績	12 成績	11 成績	10 成績	09 成績	08 成績	07 成績	06 成績	05 成績	SIMS 成績
A1	数Ⅲ	積分法	不定積分の計算	86.4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	75.4
A3	数Ⅲ	複素数平面	極形式	62.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	16.2
A7	数Ⅲ	平面上の曲線	媒介変数表示 (三角関数)	52.6	49.6	50.9	52.3	46.7	56.7	55.1	52.4	56.3	62.4	43.8
A8	数Ⅲ	微分法	f, f' の値とグラフ	49.9	48.4	49.1	51.5	53.1	54.1	—	—	—	—	62.7
B3	数Ⅲ	微分法	変曲点の性質	65.6	68.4	68.7	72.2	70.1	65.9	73.5	71.7	70.9	—	64.3
B4	数Ⅲ	平面上の曲線	媒介変数表示 (分数式)	71.4	66.3	73.6	71.4	71.4	69.1	66.5	69.8	71.0	75.9	66.2
B5	数Ⅲ	関数の極限	無限等比級数の和	66.6	65.7	67.1	65.2	69.7	68.5	62.6	65.3	68.1	72.3	55.8
B6	数Ⅲ	微分法	微分係数の値と 微分可能性	58.1	58.0	58.8	60.3	60.5	59.7	—	—	—	—	57.1
B7	数Ⅲ	微分法	指数関数の応用	63.4	57.6	58.1	56.7	54.7	60.1	57.8	56.8	60.7	63.2	58.0
B10	数Ⅲ	微分法	グラフと係数の 符号	37.4	26.4	33.4	33.8	13.8	22.6	23.9	28.2	—	—	—
C2	数Ⅲ	微分法	導関数の計算	58.0	59.9	62.8	63.6	68.7	65.4	65.3	59.2	64.7	68.6	56.8
C4	数Ⅲ	複素数平面	複素数の計算	75.2	66.4	—	—	—	—	—	—	—	—	62.9
C5	数Ⅲ	微分法	分数関数の グラフ	64.3	64.4	62.6	67.3	—	—	—	—	—	—	68.9
C6	数Ⅲ	微分法	速度ベクトル	66.9	62.0	67.9	67.2	68.1	66.0	65.0	58.9	67.9	—	58.6

D2	数Ⅲ	微分法	媒介変数表示(三角関数)の導関数	77.7	78.9	78.6	79.0	77.1	79.1	—	—	—	—	63.4
D5	数Ⅲ	微分法	変曲点の性質	60.8	63.5	64.3	63.2	66.7	59.5	62.2	63.2	66.9	72.9	55.3
D8	数Ⅲ	積分法	定積分の計算	48.0	46.7	49.6	48.2	52.8	51.2	44.9	45.4	50.0	51.4	42.3
D10	数Ⅲ	複素数平面	平面上の点の回転と拡大	18.5	22.4	—	—	—	—	—	—	—	—	—

指導要領が変わり、昨年度まで数学Cにおかれていた平面上の曲線と数学Bの複素数平面が数学Ⅲに組み込まれて数学Ⅲの標準単位数が増えたが、継続して出題されているものの成績からは大きな変化はみられないようである。

これらを14年度の正答率順に並べると次ページの表となる。

1980 実施

問題	科目	内容		14 正答率	SIMS 成績
A1	数Ⅲ	積分法	不定積分の計算	86.4	75.4
D2	数Ⅲ	微分法	媒介変数表示(三角関数)の導関数	77.7	63.4
C4	数Ⅲ	複素数平面	複素数の計算	75.2	62.9
B4	数Ⅲ	平面上の曲線	媒介変数表示(分数式)	71.4	66.2
C6	数Ⅲ	微分法	速度ベクトル	66.9	58.6
B5	数Ⅲ	関数の極限	無限等比級数の和	66.6	55.8
B3	数Ⅲ	微分法	変曲点の性質	65.6	64.3
C5	数Ⅲ	微分法	分数関数のグラフ	64.3	68.9
B7	数Ⅲ	微分法	指数関数の応用	63.4	58.0
A3	数Ⅲ	複素数平面	極形式	62.8	16.2
D5	数Ⅲ	微分法	変曲点の性質	60.8	55.3
B6	数Ⅲ	微分法	微分係数の値と微分可能性	58.1	57.1
C2	数Ⅲ	微分法	導関数の計算	58.0	56.8
			全平均	55.7	
A7	数Ⅲ	平面上の曲線	媒介変数表示(三角関数)	52.6	43.8
A8	数Ⅲ	微分法	f, f' の値とグラフ	49.9	62.7
D8	数Ⅲ	積分法	定積分の計算	48.0	42.3
B10	数Ⅲ	微分法	グラフと係数の符号	37.4	—
D10	数Ⅲ	複素数平面	平面上の点の回転と拡大	18.5	—

全問題の平均正答率を下回ったものが5題だけであり、全体的には好成績である。数学Ⅲは本年度に学習しているものであり当然とも考えられる。

本年度新たに出題したA1, A3は次の問題である。なお、手書きで記入した数値は反応率（選択率）であり、（ ）内の数値は無答率である。

A ① $\int \sqrt{x-1} dx$ はつぎのどれですか。

(ア) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$ 86.4	(イ) $\left(\frac{x^2}{2} - x\right)^{\frac{3}{2}} + C$ 1.9	(ウ) $\frac{1}{2}(x-1) + C$ 3.5
(エ) $(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$ 2.1	(オ) $\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + C$ 5.7	(8.4)

不定積分の基本問題であり、現状でも正答率が高いが、100%を目指したい。

A ③ 複素数 z の絶対値は $\sqrt{2}$ で、偏角は $\frac{3\pi}{4}$ であるとき、 z は、つぎのどれと等しいですか。

(ア) $\frac{i-1}{\sqrt{2}}$ 7.6	(イ) $i-1$ 62.8	(ウ) $\sqrt{2}(i-1)$ 16.7	(エ) $i+1$ 6.6	(オ) $\frac{i+1}{\sqrt{2}}$ 4.9
-----------------------------------	-------------------	-----------------------------	------------------	-----------------------------------

計算する必要がなく極座標が数学Ⅲの内容に含まれたこともあり、次のC4よりも好成績が期待されたが、残念な結果であった。未習なのであろうか。

次の複素数平面の2題は昨年度より継続して出題している。

C ④ $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ のとき、 z^3 はつぎのどれですか。

(ア) 0 1.1	(イ) 1 5.7	(ウ) i 75.2	(エ) $\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{i}{8}$ 9.4	(オ) $\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{i}{8}$ 2.7
--------------	--------------	-----------------	--	--

ドモアブルの定理を用いれば暗算でも結果を得ることができる問題であり、また3乗を展開しても求められる。昨年の正答率66.4%を上回ったが、一層の好成績が望まれる。

D ⑩ 点A(2,1)を原点を中心に、反時計回りに60°回転し、さらに2倍に拡大した点をBとします。点Bの座標を求めなさい。

18.1
0.4
52.7

手書きの数値は順に正答率、準正答率、無答率である。数学Ⅲの問題の中で最も正答の少なかった問題である。昨年は正答と準正答を合わせて 22.4%であったので、4 ポイント程度悪くなった。回転と拡大は、昨年度までの行列を利用するより、下の別解で示した複素数の方が簡便であり、意外な結果である。教師が複素数の利用に不慣れなためであろうか。

D ⑩

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= 2 \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \overrightarrow{OA} \\ &= 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1+2\sqrt{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\therefore B(2-\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}) \dots\dots (答)$

別解

$$\alpha = 2+i$$

$$z = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ とおくと}$$

$$\beta = 2\alpha z = 2(2+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= (2+i)(1+\sqrt{3}i)$$

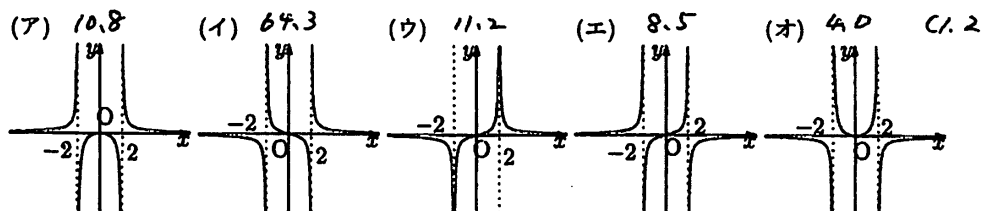
$$= (2-\sqrt{3}) + (1+2\sqrt{3})i$$

$\therefore B(2-\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}) \dots\dots (答)$

複素数の積が平面上の回転拡大に対応することは、生徒にとって印象深いことで興味を持つものが多い。時間が許すならば数学Ⅲに限らず複素数を扱う場面で取り上げたい。

SIMS(1980 年実施)の結果との比較では、次の 2 題を除き今回の調査が上回っている。

C ⑤ $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+2)}$ のとき、関数 $f(x)$ のグラフは、つぎのどれですか。



SIMS 68.9%

A ⑧ 関数 $f(x)$ について、「 $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$ かつ $f''(x)$ は定義域のすべての x に対して負」という条件が与えられているとき、下のグラフの中で、この条件を満たすものはどれですか。

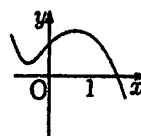
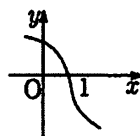
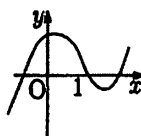
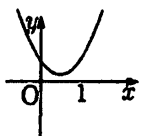
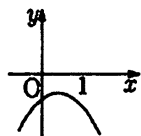
(ア) 49.8

(イ) 2.3

(ウ) 14.3

(エ) 20.7

(オ) 12.1



SIMS 62.7%

いずれも定型的な問題でなく、応用的総合的な問題である。この 2 題だけで結論付けることはできないが、定型的な問題の解法の指導だけでなく、自ら考えて基本事項を活用する場面を出来るだけ多く設定するように心がける必要があると思われる。

2.5.4 背理法の問題について

現在の大学生の背理法の定着に課題があると感じ、昨年と同じ背理法の問題の出題した。その結果を踏まえて高校数学において背理法に関する学習を検討した。

(1) 問題と統計的資料

① 問題と解答

B 1 1 で出題した背理法の問題は以下の通りで、この問題はほとんどの教科書で演習問題として掲載されている。

問題 有理数 a, b について、 $a + b\sqrt{2} = 0$ ならば、 $a = b = 0$ であることを証明せよ。ただし、 $\sqrt{2}$ が無理数であることを使ってもよい。

模範解答 $b \neq 0$ とすると、

$$\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$$

a, b が有理数であるから、右辺の $-\frac{a}{b}$ も有理数となる。左辺の $\sqrt{2}$ が無理数であるから、上の式は矛盾する。よって、 $b = 0$ となる。これを、 $a + b\sqrt{2} = 0$ に代入すると、 $a = 0$ となる。したがって、 $a + b\sqrt{2} = 0$ ならば、 $a = b = 0$ であることが証明される。

問題を解答した生徒は、1643 名 (1529 名) (男 1193 名 (1142 名), 女 450 名 (387 名)) (以下 () 内は 2013 年) であり、7.5% の増加があった。

② 正答率、誤答率、無答率

問題に対する、正答率、誤答率、無答率は

正答率 20.40% (8.0%), 誤答率 49.9% (66.1%), 無答率 29.7% (25.9%) となっている。2013 年は正答率が一番低い問題であったが、2014 年度は下から 3 番目であった。学習指導要領の改訂に伴い、背理法の学習が数学 A から数学 I に移行されたことが 1 つの要因と考えられる。

男女別正答率は、

男子 22.2% (8.9%), 女子 15.6% (5.2%)

であり、2013 年度と同様に t 検定の結果男女差があるといえる。

③ 自信度

正答者の自信度は、

あり 46.3% (54.2%), あまりなし 33.3% (30.0%), 全くなし 18.1% (14.2%)

となり、誤答者の自信度は、

あり 12.1% (14.6%), あまりなし 34.1% (31.3%), 全くなし 44.9% (46.9%)

であった。正答者の自信度が高いこと、誤答者の自信度が低いことを示している。

また、自信度別の正答率は、

あり 54.6% (30.2%), あまりなし 30.0% (10.2%), 全くなし 11.9% (3.2%)

となり、正答率と自信度は正の相関があると考えられる。

(2) 誤答分析

① 誤答例

誤答の答案およそ 820 枚から 100 枚を抽出（無作為ではない）して誤答の分析をしました。誤答の種類は次の 4 種類に分かれた。

- | | |
|--------------------------|-------------|
| 1. 背理法を使用していない。 | 56 枚 (62 枚) |
| 2. 証明になっていない。未完成である。 | 36 枚 (25 枚) |
| 3. $a = b = 0$ の否定ができない。 | 8 枚 (12 枚) |

それぞれの代表的な誤答例を以下に示す。

1. の誤答例

「有理数×無理数＝無理数」の命題を使用しているが、この命題は有理数が 0 でない時に成立ことを述べていない。さらに、この命題を証明しなくて使用している。この命題を証明することが、問題の本質といえる。

2. の誤答例

「 $a + b\sqrt{2} = 0$ により、 となる。

$(a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + b^2 = 0$ に $a = -b\sqrt{2}$ を代入すると、

$(-b\sqrt{2})^2 + 2(-b\sqrt{2})b\sqrt{2} + b^2 = 0, 2b^2 - 4b^2 + 2b^2 = 0.$

よって、 $b = 0$ となる。したがって、 $a = b = 0$ である。」

張り法が使用されてなく、あきらかにミスをしている。また、対偶を証明しようとする解答が多く見られた。

3. の誤答例

$a = b = 0$ の否定を $a \neq b \neq 0$, または、 $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$, または、 $a = b \neq 0$ としています。このように仮定しても背理法で証明できるので、準正解とした。

誤答 1. と 2. は背理法を使用していない解答で、誤答 3. は背理法を使用している解答である。

1. の誤答は、背理法自体の理解がなされていないことが原因であると予想される。

2. の誤答の多くは、背理法と対偶法の違いが十分に理解されていないことによると考えられる。背理法と対偶法がほぼ同じ時期に学習され、混同したままの状態が続いていることが要因の 1 つといえる。

3. の誤答は、命題「 $p \wedge q$ 」の否定が「 $\sim p \vee \sim q$ 」となることを知らないことが原因であり、否定命題の学習が高校数学で十分に実施されていないのではと思っている。

生徒たちは、証明がそれぞれの命題に付随しているものと認識し、証明を暗記する学習をしていると考えられる。論理教育の充実が必要であるといえる。

② 誤答別自信度

それぞれの誤答における自信度は次の通りであった。

1. の誤答 あり 11 枚 (11 枚), あまりなし 23 枚 (16 枚), 全くなし 19 枚 (30 枚),
2. の誤答 あり 5 枚 (2 枚), あまりなし 10 枚 (4 枚), 全くなし 22 枚 (17 枚),
3. の誤答 あり 1 枚 (3 枚), あまりなし 6 枚 (6 枚), 全くなし 0 枚 (3 枚),

1. および 2. の誤答者のなかで

自信ありと答えた生徒は	17.8% (14.9%),
あまり自信なしと答えた生徒は	36.7% (23.0%),
全く自信なしと答えた生徒は	45.6% (54.0%),

であった。2013 年に比べて、自信ありおよびあまり自信なしと答えた生徒の割合は増加している。背理法そのものの理解と自信の度合いに差があるといえる。

(3) 背理法の学習法

現高校 3 年生は、背理法を「数学 I (2) 数と集合」で学習しているが、その時のみの学習で、その後どこでも使用されないことが定着しない理由ではないかと考えている。さらに、ほとんどの教科書では、

「 $\sqrt{2}$ が無理数である。」

の証明に背理法を使う問題を取り扱っている。このことが背理法を使用する問題が「 $\sqrt{2}$ が無理数である。」ことのみであると生徒に認識させているといえる。すなわち、高校生の背理法の学習は極めて限定的であり、さらに、数学のみで使用するものと認識させられているといえる。

これを改善するためには、背理法が日常生活でも盛んに使われていること認識させることが必要であり、そのための教材（パズル・クイズを含む）を検討することが今後の課題になると考えられる。