2.5　問題分析

資料Ⅱをもとに，問題別成績を科目別に表 2.18 にまとめた。

表 2.18　科目別正答率

科目	正答率（問題番号）	平均
数学Ⅰ	70.1(A2)，40.2(B10)，66.1 (C5)，32.7 (C10)，78.5 (D3) 5題	57.5
数学A	30.0(A8)，70.4(B2)，62.5(C7) 3題	54.3
数学Ⅱ	58.8(A6)，46.8(A7)，62.0(A9)，28.4(A10)，82.4(B1)，68.2(B4)，42.1(B6)，50.8(B8)，41.0(B11)，82.2(C1)，29.4(C8)，15.0(C11)，84.0(D1)，74.5(D2)，48.1(D9)，17.2(D11) 16題	51.9
数学B	83.5(A1)，17.1(B9)，26.8(C9)，76.1(D4)，32.3(D10) 4題	47.2
数学Ⅲ	68.7(A3)，62.8(A4)，33.4(A11)，64.3(B5)，49.1(B7)，78.8(C2)，67.1(C3)，62.6(C4)，64.2(D6)，58.1(D7)，49.6(D8) 11題	59.9
数学C	50.9(A5)，67.9(B3)，61.5(C6)，73.6(D5) 4題	63.5

(注)（　）内は問題番号を表す。

この表から，調査実施委員会では全体として平均正答率が 50%～60%で収まるように事前に予想・設計していたので，おおむね当初の目的は達成されたとみている。

以下の問題例示は，東京理科大学数学教育研究会月例会（1 月 26 日（土）15：00～17：00）において，数学Ⅰ，数学Ａの問題については，新井田和人委員（慶應義塾高等学校），数学Ⅱ，数学Ｂの問題については，荻野大吾委員（東京都立戸山高等学校），数学Ⅲ，数学Ｃの問題については，須田学委員（筑波大附属駒場中・高等学校），鈴木清夫委員（筑波大附属駒場中・高等学校）が分担して発表した中から抜粋したものである。

2.5.1　数学Ⅰ，数学Ａ問題について

数学Ⅰ,Aの問題(A～Dセットの全問 44 題のうち８題)について，正答率と教師評価の差について考察を行った。この２つの値に注目したのは次の理由からである。

正答率…各問の正解者の割合

教師評価…各校の教員が自ら教えている生徒の出来を予想した正答率

つまり，この数値の差が小さい問題ほど，教員は生徒の理解度を正しく把握しており，差が大きい問題ほど把握していないことを表しているからである。

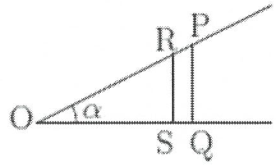
まず，正答率と教師評価がほぼ一致しているのは，以下の問題である。

(D3) 右の図で，PQ⊥OQ およびRS⊥OQ です。

OQ=OR= 1，∠POQ = α とすると，PQ はつぎのどれですか。

(ア) $\sin\alpha$ (イ) $\cos\alpha$ (ウ) $\tan\alpha$ (エ) $2\sin\alpha$

(オ) $1-\cos\alpha$ 正答（ウ）



正答率 78.5% 教師評価 60.4% 正答率−教師評価=18.1%

(C5) 商品を$x \times 10^3$個 $(0 < x < 5)$ 売ったときの利益$y \times 10^3$ 円を予想するために，つぎの２ つの関係式A，B を考えました。

関係式A : $y = 6x - x^2$ ， 関係式B : $y = 2x$

関係式Aより関係式B の方が，多くの利益をあげるようなx の範囲は，つぎのどれですか。

(ア) $0 < x < 4$ (イ) $0 < x < 5$ (ウ) $3 < x < 5$

(エ) $3 < x < 4$ (オ) $4 < x < 5$ 正答（オ）

正答率 66.1% 教師評価 48.8% 正答率−教師評価=17.3%

(A2) 右のグラフにおいて，つぎのどの場合に

$ax + b > cx^2$ となりますか。

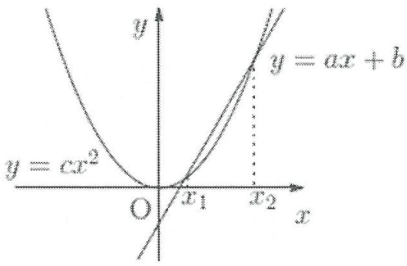
答えは，つぎの中から選びなさい。

(ア) $(x - x_1)(x - x_2) > 0$

(イ) $(x - x_1)(x - x_2) < 0$

(ウ) $0 < x < x_1$ (エ) $x > x_2$

(オ) (ア)〜(エ)のどれでもない。



正答率 70.1% 教師評価 58.9% 正答率−教師評価=11.2%

逆に，B10 は教師評価 51.2%に対して正答率が 40.2%と教師の考えている以上に正答率が低かった。今回は，数学 I，数学 A に関して，正答率が教師評価より低い問題は唯一 B10 のみであった。

(B10)) △ABC は，AB=10，AC=15，∠BAC = 60° である。∠BAC の２等分線と BC との交点をD とするとき，AD の長さを求めなさい。

正答率 40. 2% 教師評価 51, 2% 正答率−教師評価=−11. 0%

2.5.2　数学Ⅱ，数学Ｂ問題について

調査問題１１問×４セット＝４４問のうち２１問が数学Ⅱ，数学Ｂからの出題であった。

図 2.3 問題別成績参照，正答率ベスト４とワースト６が数学Ⅱ，数学Ｂの内容

表 2.8 参照．期待正答率を大いに下回る問題 22 問のうち 13 問が数学Ⅱ，数学Ｂ

表 2.9 参照．教師評価を大いに下回るもの１問中１問が数学Ⅱ

教師評価を下回るもの５問中５問が数学Ⅱ，数学Ｂ

数学は他教科よりも成績差がつきやすいと言われるが，特に数学Ⅱ，数学Ｂは差がつきやすい科目である。受験勉強を始める高校三年生の生徒にとっては数学Ⅲ，数学Ｃを履修していて，自分で勉強を始めるのは数学Ｉ，数学Ａからであるため，数学，Ⅱ数学Ｂはその後になってしまう。

数学Ⅱ，数学Ｂのうち正答率が 80%以上の問題は４題あった。それらの問題は正答率の自信度（自信率／正答率）が６割以上の問題である。生徒にとっては易しい問題であった。

(A1) 正答率 83.5%，自信率 60.5%

A1.　$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ で定義される数列の一般項 a_n は，つぎのどれですか。

(ア) $a_n = 4$　　(イ) $a_n = 4n + 2$　　(ウ) $a_n = 2n - 1$

(エ) $a_n = 2n + 2$　　(オ) $a_n = n^2$

数学Ｂの数列の漸化式の問題．階差数列が{2ｎ+1}という数列．階差数列を利用する方法，四角数で考える方法．実際に数を代入して（推測）考える等の方法がある。

(B1) 正答率 82.4，自信率 56.3%

B1.　$10^a = 4$ のとき，10^{1+2a} の値は，つぎのどれですか。

(ア) 26　　(イ) 40　　(ウ) 160　　(エ) 900　　(オ) 10^9

数学Ⅱの指数関数の問題．生徒にとっては指数法則で，$10^{a+b} = 10^a 10^b$ の公式よりも

$10^{ab} = (10^a)^b$ の公式のほうが間違えやすいような気がする。

(C1) 正答率 82.2%　自信率 62.3%

C1.　関数 $y=3x^2-x^3$ のグラフをかくとき，この関数の極小値を示す点の座標は，つぎのどれですか。

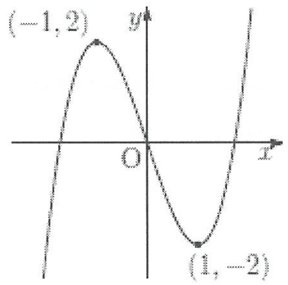
(ア) (2 , 4)　　(イ) (3 , 0)　　(ウ) (1 , 2)
(エ) (0 , 3)　　(オ) (0 , 0)

数学Ⅱの微分法の問題．導関数を求め増減表をかく．与式を因数分解すれば原点で極値になることはわかる．初めから式 $y=3x^2-x^3$ が与えられているので，生徒にはやりやすい．

(D1) 正答率 84.0%　自信率 61.4%

D1.　つぎの図は，ある3次関数 $f(x)$ のグラフを表します。$f(x)$ は，つぎのどれですか。

(ア) $f(x)=-x^3-x$　　(イ) $f(x)=x^3-3x^2$
(ウ) $f(x)=x^3-3x$　　(エ) $f(x)=3x^3-x$
(オ) $f(x)=x^3+3x^2$



数学Ⅱの微分法の問題．生徒にとってはとてもよく見かける問題である。

正答率の自信度（自信率／正答率）が4割未満の問題

(A6) 正答率 58.8%　自信率 15.1%

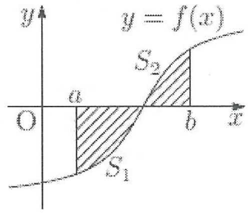
A6.　$f(x)$ は偶関数で $x=0$ で微分可能であるとき，$f'(x)$ は，つぎのどの条件を満たしますか。

(ア) $f'(0)=1$　　(イ) $f'(0)>0$　　(ウ) $f'(0)<0$
(エ) $f'(0)=0$　　(オ) $f'(0)$ はどんな値でもとることができる。

数学Ⅱの微分法積分法の問題．グラフがイメージできるかがポイントになる．

(A7) 正答率 46.8%　自信率 18.5

A7.　右の図の曲線は $y=f(x)$ のグラフであり，a は b より小さい。
また，
S_1 は x 軸，直線 $x=a$，および曲線 $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積，
S_2 は x 軸，直線 $x=b$，および曲線 $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積
で，$0<S_2<S_1$ とします。このとき，$\int_a^b f(x)dx$ は，つぎのどれですか。



(ア) S_1+S_2　　(イ) S_1-S_2
(ウ) S_2-S_1　　(エ) $|S_1-S_2|$　　(オ) $\frac{1}{2}(S_1+S_2)$

数学Ⅱの積分法の問題．x 軸の下側の面積は，定積分の値にマイナスの符号をつける。授業では定積分を面積にするが，この問題は面積を定積分にする．の違いがある．ただそれだけのことだが，生徒にとってこのような出題は馴染みが少ない．

(A10) 正答率 28.4%　自信率 10.5%

A10.　座標平面上の２円 $(x-2)^2+(y-14)^2=125$，$x^2+y^2=25$ の共通な弦と原点との距離を求めなさい。

数学Ⅱの図形と式の問題．ｓｆ（ｘ）+ｔｇ（ｘ）=0 の形に慣れているかがポイント。ただし，教科書では発展扱いである。点と直線の距離の公式も公式として大切である。問題文の「共通な弦」という言葉の意味が理解できるかどうかも気になる。

(B6) 正答率 42.1%　自信率 9.0%

B6.　直線 l の方程式は $ax+by=0$，直線 m の方程式は $px+qy+r=0\ (r\neq 0)$ です。
l と m が点P で交わるとき，方程式

$$(a+p)x+(b+q)y+r=0$$

の表す直線について，次のどれがあてはまりますか。ただし，O は原点とします。

(ア) l と m の両方に垂直である。　(イ) l, m と二等辺三角形を作る。
(ウ) OP に平行である。　(エ) O を通る。
(オ) P を通る。

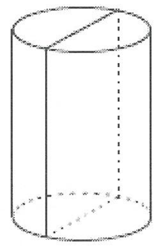
数学Ⅱの図形と式の問題．２つの曲線（直線）ｙ＝ｆ（ｘ）とｙ＝ｇ（ｘ）があり，

ｓ，ｔを定数として，ｓｆ（ｘ）+ｔｇ（ｘ）=0 の形．問題(A)の 10 番でも同様.

B8：正答率 50.8%　自信率 21.5%

B8.　円柱を右の図のように軸を通る平面で切ると，その切り口は長方形になります。この切り口の長方形の周囲が6m であるような円柱の中で，最大の体積を持つものの底面の半径は，つぎのどれですか。

(ア) 2.5 m　(イ) 2 m　(ウ) 1.5 m　(エ) 1 m　(オ) 0.5 m



数学Ⅱの微分法の問題．底面の半径を r とおいて，体積Vを r で表す。初めに式を与えられていて微分するのならできるが，自分から立式することは苦手な生徒はいる。

B11：正答率 41.0%　自信率 12.8%

B11.　$\frac{3}{2}$，$\log_3 0.6$，$\log_3 4$，$\log_4 3$　の大小関係を調べ，小さい順に並べなさい。

数学Ⅱの対数関数の問題．底を 3 にそろえることがポイント．対数の値が 1 より大きいかどうかすぐ気づいてほしい．$\log_3 4 < \log_4 4 < \log_4 4$ の発想が持てるかどうか．推移律，「はさむ」感覚は大切．不等式の証明で推測してから証明するような問題，例えば，「a<b のとき，C=2a+5b と D=5a+2b ではどちらが大きいか．」等を考えさせたい．

C8：正答率 29.4%　自信率 9.6%

C8.　x, yは正の実数で，$y = 4x^3$とします。
$\log y$をx座標，$\log x$をy座標とする点の集合は，つぎのどれになりますか。
(ア) 1点　(イ) 3次曲線　(ウ) 放物線
(エ) 直線　(オ) 指数関数の表す曲線

数学Ⅱの対数関数の問題．普通に公式を当てはめるだけであるがなかなかできていない。対数の曲線から，答えが直線になることは，生徒にはなかなか予想はつかないのではないか。さらに，私としては最近，「広い試験範囲の試験に強くなること」と「初めて見る問題に対応できるようにすること」に注意をして指導をしている．

2.5.3　数学Ⅲ，数学 C 問題について

数学Ⅲ，数学 C からの出題は 15 題である。各問題の反応率から誤答についての分析を試みた。それを以下のスライドで表すことにした。

選択肢「ア，イ，ウ，エ，オ」における反応率（選択する割合）の序列は，05年度〜12年度で変化することはほとんどない（表では07年度が例外）．例えば，問題D–6では，「イ → ア → オ → エ → ウ」の順である．

年度	ア	イ	ウ	エ	オ
12	19.6 %	64.3 %	3.2 %	4.6 %	7.4 %
11	23.7 %	59.0 %	3.6 %	5.5 %	7.6 %
10	21.9 %	64.6 %	2.7 %	4.2 %	6.2 %
09	24.4 %	61.7 %	2.2 %	4.9 %	5.8 %
08	22.1 %	61.1 %	3.9 %	4.4 %	7.4 %
07	25.3 %	56.6 %	2.5 %	7.6 %	6.9 %
06	23.7 %	61.1 %	2.0 %	5.0 %	7.3 %
05	20.0 %	65.5 %	1.3 %	4.1 %	8.5 %

ここでは，(イ)が正答であるが，(ア)は反応率の高い誤答である．
12年度における数学III・Cの「反応率の高い誤答」について分析し，今後の指導の改善を考察する．

2

問題D–6 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ の値は，つぎのどれですか．

(ア) 0 (イ) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ (ウ) $\dfrac{1}{2}$ (エ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (オ) ∞

19.6% 64.2% 3.2% 4.6% 7.4%

(イ) 分子の有理化により，　※ hに0を代入？

(与式) $= \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

(ア) (与式) $= \dfrac{\sqrt{2+0}-\sqrt{2}}{0} = \dfrac{0}{0} = 0$

※ hに0を代入して，分子が0だから0

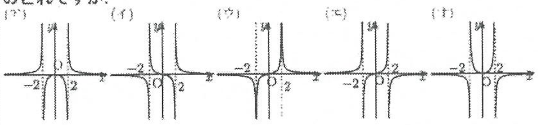
(注) 0でない値をとりながらhが0に近づくこと（極限の定義）を確認．

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = 2$ ※ 実際に $h = 1, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}, \cdots$ を代入してみる．

単に，$h \neq 0$だから $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{1} = 2$ では，抽象的で難しい．

3

問題C–4 $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x+2)}$ のとき，関数$f(x)$のグラフは次のどれですか．



12.8% 62.6% 12.1% 8.5% 3.2%

(イ) $\displaystyle\lim_{x\to 2\pm 0} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to -2\pm 0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 0$.

$f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ より，$f'(x) = -\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)} < 0$なので，減少関数．

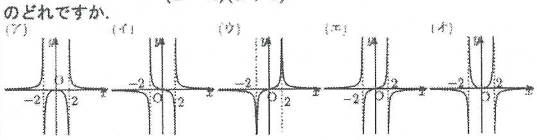
(ア・イ・ウ) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +0$で選んだと予想される．

(ア) $f(1) < 0$までOK．$f(-1) > 0$，$f(-x) = f(x)$などのミス？

(ウ) $f(-x) = -f(x)$までOK．$\lim_{x\to 2-0} f(x) = +\infty$などのミス？

4

問題C–4 $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x+2)}$ のとき，関数$f(x)$のグラフは次のどれですか．



12.8% 62.6% 12.1% 8.5% 3.2%

(注) (ア・イ・ウ)の反応率に比べ，(エ)の反応率が低いことから，最初 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +0$に着目し，$f(-x) = -f(x)$による対称性までは気付いていないか．整数の偶奇のように，$\dfrac{(奇関数)}{(偶関数)} = (奇関数)$も成立．この問題自体は，$f(-3) < 0$，$f(-1) > 0$，$f(1) < 0$，$f(3) > 0$ だけで(ウ)に絞れる．微分に頼らず，多角的な視点を持って欲しい．

5

問題C–3 無限等比級数$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots$の和は，つぎのどれですか．

(ア) $\dfrac{5}{8}$ (イ) $\dfrac{2}{3}$ (ウ) $\dfrac{3}{5}$ (エ) $\dfrac{3}{2}$ (オ) ∞

7.2% 67.1% 6.2% 6.3% 12.3%

(イ) (与式) $= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

(オ) (与式) $= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{32} + \cdots$ とみて，正の数の無限和だから∞．

また，(ア)~(エ)から1つ選べず，苦し紛れに(オ)を選んだ．

(ア) 最初の4項の和．　(エ) 分数の計算ミス？

(注) 正の数の無限和が必ずしも∞にならないことを確認し，安易に∞としないようにする．例えば，$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots = 2$を図形的に考えさせる．また，(与式) $= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \cdots < 1$という見方もできる．

6

問題B–5 関数$y = 3x^3 + 6x^2 + kx + 9$のグラフの変曲点における接線の傾きが0となるとすれば，kの値はいくらですか．

(ア) 0 (イ) 1 (ウ) 2 (エ) 3 (オ) 4

9.6% 4.3% 6.6% 13.5% 64.3%

(オ) $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + kx + 9$とおき，$f'(x) = 9x^2 + 12x + k$．

$f''(x) = 18x + 12 = 6(3x+2)$より，$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$．

$x = -\dfrac{2}{3}$の前後で$f''(x)$の符号が変わるので，ここが変曲点で

$f'\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 4 - 8 + k = 0 \Leftrightarrow k = 4$．(エ) 係数が3，6，9だから？

(ア) $f''\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 4 - 4 + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$.

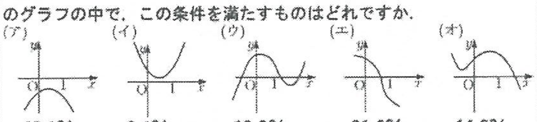
(注) $f(x)$: y座標の値，$f'(x)$: 接線の傾き，正負によりfの増減

$f''(x)$: 正負によりf'の増減（接線の傾きの増減）

3つのグラフ$y = f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$の相関を図形的に解釈．

7

問題B–7　関数$f(x)$について，「$f'(0)>0$，$f'(1)<0$かつ$f''(x)$は定義域のすべてのxに対して負」という条件が与えられているとき，下のグラフの中で，この条件を満たすものはどれですか．



(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
49.1%	2.4%	12.0%	21.6%	14.0%

(ア) $f'(0)>0$，$f'(1)<0$から(ア)，(ウ)，(オ)に絞れる．$f''(x)<0$より上に凸なので，これを満たすグラフは(ア)のみである．

(エ) $f(0)>0$，$f(1)<0$，$f'(x)<0$ と解釈したか．　※SIMSが上
$f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$の意味の理解が曖昧である可能性もある．

驚くべきことに，(エ)の反応率は09年から，20.2→21.9→20.5→21.6と推移している．毎年20%以上の生徒が，f，f'，f''を混同しているか．

問題C–2　$x=2\cos t$，$y=\sin t$のとき，$\dfrac{dy}{dx}$を t で表すと，つぎのどれになりますか．

(ア) $\frac{1}{2}\tan t$	(イ) $2\tan t$	(ウ) $\frac{1}{2\tan t}$	(エ) $-\frac{1}{2\tan t}$	(オ) $-\frac{2}{\tan t}$
4.9%	3.0%	6.0%	78.6%	6.8%

(エ) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t}{-2\sin t}=-\dfrac{1}{2\cdot\frac{\sin t}{\cos t}}=-\dfrac{1}{2\tan t}$

(オ) 計算の途中で，2が分子に行ってしまった?

(ウ) $\dfrac{dx}{dt}=(2\cos t)'=2\sin t$．マイナス付け忘れ．

(注) 単純な計算ミスに注意せよ．

問題D–7　放射性元素は，つぎの式にしたがって崩壊します：
$y=y_0\cdot e^{-kt}$．ただし，yはt日後に残っている元素の量，y_0は$t=0$のときのyの値を示します．半減期（その元素の半分が崩壊するまでの時間）が4日である元素の定数kの値は，つぎのどれですか．

(ア) $\frac{1}{4}\log_e 2$	(イ) $\log_e\frac{1}{2}$	(ウ) $\log_e 2$	(エ) $(\log_e 2)^{\frac{1}{4}}$	(オ) $2e^4$
58.1%	11.5%	7.7%	15.7%	3.3%

(ア) $\dfrac{1}{2}y_0=y_0\cdot e^{-4k}$より$\dfrac{1}{2}=e^{-4k}\Leftrightarrow -4k=\log_e\dfrac{1}{2}$なので，
$k=-\dfrac{1}{4}\log_e(2^{-1})=\dfrac{1}{4}\log_e 2$　※SIMSと同程度

(エ) $\dfrac{1}{4}\log_e 2=(\log_e 2)^{\frac{1}{4}}$ と変形してしまった?

(イ) $\log_e\dfrac{1}{2}$の計算ができないと思って，そのまま選択した?

(注) 対数計算でありがちな計算ミスをわざと見せる機会を作ること．
$\log_e 2^{\frac{1}{4}}=\log_e(2^{\frac{1}{4}})$，$(\log_e 2)^{\frac{1}{4}}$？　カッコを省略して書かないこと．

問題A–3　関数fのグラフ上で，$(a,1)$がグラフの変曲点になるとき，つぎのどれがつねに成り立ちますか．　(ア) $f(a)=0$　0.7%
(イ) $f'(a)=0$　18.6%　(ウ) $f''(a)=0$　68.7%
(エ) fは$x=a$で極大値か極小値をとる　11.1%
(オ) f'は$x=a$で極小値をとる　0.7%

(ウ)「$f''(a)=0$」かつ「$x=a$の前後で$f''(x)$の符号が変化する」
よって，$f''(a)=0$はつねに成り立つ．
※これは，変曲点になるための必要条件であり，十分条件でない．

(イ) 変曲点と$f''(x)=0$が関連があることを，$f'(x)=0$と勘違い?
変曲点を持つグラフの例として，$y=x^3$のイメージが強かった?

(エ) 変曲点と極値をとる点を混同している．グラフが曲がるところを変曲点とみなした?

(注)　$f(x)=x^2$，$f(x)=x^3$，$f(x)=x^4$，$f(x)=x^3+x$
のように基本的な関数のグラフと増減表を比較して理解を深める．

問題A–4　$\dfrac{4}{\sqrt{3x-4}}$の導関数は，つぎのどれですか．

(ア) $12\sqrt{3x-4}$　4.2%　(イ) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$　3.5%　(ウ) $\dfrac{-2}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$　22.7%

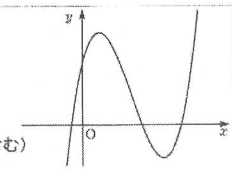
(エ) $\dfrac{-6}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$　62.8%　(オ) $6\sqrt{3x-4}$　6.2%

(エ) $\left(\dfrac{4}{\sqrt{3x-4}}\right)'=\left(4(3x-4)^{-\frac{1}{2}}\right)'$
$=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(3x-4)^{-\frac{3}{2}}\cdot\underline{(3x-4)'}=\dfrac{-6}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$

(ウ) $\underline{(3x-4)'}(=3)$ の付け忘れ．

(注) $\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot\underline{g'(x)}$
合成関数の見方は数学IIIで出てくるが，数学I，IIでも指導は可能．
$y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=f(g(x))$，$y=g(f(x))$のグラフを比較する活動などで，早い段階から合成の感覚を磨く．

問題A–11　右は3次関数
$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$
のグラフです．
係数a，b，c，dの符号を決めなさい．
正答率 33.4%（準正答率 6.4%を含む）
誤答率 51.4%　無答率 15.2%



(解) グラフの形とy切片より，$a>0$，$d>0$．$y'=3ax^2+2bx+c$．
$0<\alpha<\beta$として$x=\alpha,\beta$で極値を持つので，$3ax^2+2bx+c=0$は$x=\alpha,\beta$を解にもつ．解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{3a}$．
$\alpha>0$，$\beta>0$，$a>0$より，$b<0$，$c<0$．

(注) 単純に決定できる$a>0$，$d>0$はほとんどが正解．b，cの符号の決定では，f'，f''を利用するが，その処理でつまづいている．このようなタイプの問題を授業中により多く扱うことが大事．

問題D−8　$\int_0^1 \frac{12x}{(2x^2+1)^2}\,dx$ の値は，つぎのどれですか．

(ア) -2	(イ) -1	(ウ) 2	(エ) $\log 2$	(オ) $3\log 3$
7.9%	9.2%	49.8%	13.2%	14.8%

(ウ) $t = 2x^2+1$ とおくと，$\frac{dt}{dx} = 4x$ なので，

$$(\text{与式}) = 3\int_0^1 \frac{4x}{(2x^2+1)^2}\,dx = 3\int_1^3 \frac{1}{t^2}\,dt = 3\left[-\frac{1}{t}\right]_1^3 = 2$$

(オ) $3\int_1^3 \frac{1}{t^2}\,dt = 3\Big[\log t\Big]_1^3 = 3(\log 3 - \log 1) = 3\log 3$

(エ) $\log 3 - \log 1 = \log 2$ を含むものを選んだ?

(注) 28%が $\int \frac{1}{t^2}\,dt = \log t + C$ のような間違いをしているか?

$(\log t)' = \frac{1}{t}$ なので間違いは明らか．

積分が正しいことを，微分して確認する習慣を付けて欲しい．

14

問題C−6　$x,\ y$ は実数です．行列 $A = \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ y & 1\end{pmatrix}$ の積が交換可能になるための必要十分条件は，つぎのどれですか．

(ア) $x=0$　1.6%　(イ) $y=0$　1.7%　(ウ) $x=y$　5.0%

(エ) $x=0$ または $y=0$　61.5%　(オ) $x=0$ かつ $y=0$　29.4%

(エ) $AB = \begin{pmatrix}1+xy & x\\ y & 1\end{pmatrix}$，$BA = \begin{pmatrix}1 & x\\ y & xy+1\end{pmatrix}$ なので，

$AB = BA \Leftrightarrow 1+xy = 1 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow$「$x=0$ または $y=0$」

(オ) $xy=0 \Leftrightarrow$「$x=0$ かつ $y=0$」

もしくは，「$x=0$ かつ $y=0$」$\Rightarrow AB = BA$ で十分条件を答えた．

(注) 数学におけるカンマ「,」の意味は「かつ」であることが多いが，

$(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ 2$

では書き並べのカンマであり，「$x=1$ または $x=2$」を意味する．

15

問題D−5　媒介変数表示による方程式 $x = t + \frac{1}{t}$，$y = t - \frac{1}{t}$ で表される曲線の $x,\ y$ についての方程式は，つぎのどれですか．

(ア) $x+y=1$　2.9　(イ) $x+y=2$　8.4　(ウ) $x^2+y^2=4$　10.2

(エ) $x^2-y^2=4$　73.6　(オ) $2x^2-y^2=4$　3.0

(エ) $x^2 = t^2+2+\frac{1}{t^2}$，$y^2 = t^2-2+\frac{1}{t^2}$ なので，$x^2-y^2=4$．

(ウ) 単なる計算ミス? 計算せずに，直線以外で一番身近な円を選んだ?

(注) $t=1$ のとき $(x,\ y) = (2,\ 0)$ であり，(イ)，(ウ)，(エ)に絞れる．

さらに，$t=2$ のとき $(x,\ y) = \left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ であり，(エ)のみに絞れる．

この問題を解くというだけであれば，わずか2点のみ調べれば十分．

媒介変数は抽象的になりがちだが，方程式を求めた後には，実際に t に値を代入して，方程式が正しいことを実感させることが大事．このことには，x のとり得る値に範囲が出来ることを意識させる効果もある．

16

問題B−3　時刻 $t\ (t>0)$ において，座標平面上の動点 $(x,\ y)$ が

$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \log(1+2t) \end{cases}$ と表されるとき，時刻 t での速度ベクトルは，つぎのどれになりますか．

(ア) $(e^{-t},\ \log(1+2t))$　10.7%

(イ) $\left(e^{-t},\ \frac{1}{1+2t}\right)$　10.0%　(ウ) $\left(-e^{-t},\ \frac{2}{1+2t}\right)$　67.9%

(エ) $\left(-e^{-t},\ \frac{1}{1+2t}\right)$　9.2%　(オ) $\left(-1,\ \frac{1}{t}\right)$　1.2%

(ウ) 速度ベクトル $\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = \left(-e^{-t},\ \frac{2}{1+2t}\right)$．

(ア) t による動点 $(x,\ y)$ の動き方自体を速度と解釈した．

(イ・エ) $\frac{dx}{dt} = e^{-t}$，$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+2t}$．$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot \underline{g'(x)}$

(注) 水平投射 $(x,\ y) = (t,\ 5t^2)$ のような身近な例で，瞬間の速さを実感させる．微分の導入で必ず扱うが，関数の微分計算の後は忘れがち．

17

問題A−5　座標平面上で，時刻 t における動点Mの座標 $(x,\ y)$ は，

$\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 2\cos 2t - 1 \end{cases}$ です．点Mの軌跡は，つぎのどれですか．

(ア) 直線	(イ) 半円	(ウ) 半楕円	(エ) 放物線	(オ) うずまき線
4.1%	8.4%	25.6%	50.9%	9.6%

(エ) $y = 2(1-2\sin^2 t) - 1 = 1 - 4\sin^2 t = 1 - x^2$ より，放物線．

(ウ) $\cos 2t$ の変形などの計算ミスで楕円の方程式になった?

$x = 2\sin t$，$y = 2\cos t$ ならば円になり，$\cos$ の t が $2t$ になっているので，円ではないから楕円とした?

$-2 \leqq x \leqq 2$ から(イ)，(ウ)に絞り，t と $2t$ の非対称性より楕円?

(オ) 特に計算することなく，苦し紛れか?

(注) 直線を「直線の一部」，放物線を「放物線の一部」のように問題を変更した方がよいかもしれない．※現状ではSIMSの文章のまま

18

まとめ

特に数学III・Cでは，

牛刀割鶏（ぎゅうとうかっけい）　（牛刀（ぎゅうとう）もて鶏（にわとり）を割（さ）く）

になりがち．

（取るに足りない小さなことを処理するのに，大げさな方法を用いる）

公式に振り回されず，

地に足のついた指導を！

- 代入して確認　（点をプロットせよ）
- 逆算して確認　（積分したら微分せよ）
- 具体例で確認　（図的イメージを付けよ）

19