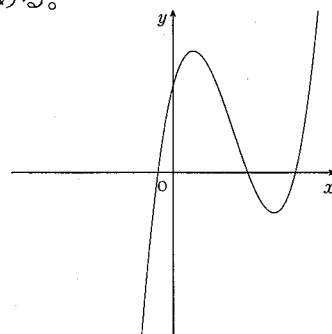


(半田 真委員)

(3) 問題 右の3次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフである。

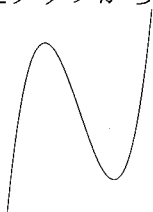
係数 a, b, c, d の符号を求めなさい。



この問題の正答率が、33.8%と低いことについて考えてみる。

問題は3次関数の与えられたグラフから、各次数の係数と定数項の符号を求める問題である。

x^3 の係数は、グラフの形が



であるから、 $a > 0$ である。

数学問題Bの1.(3次関数のグラフから関数の3次式を求める問題)の正答率が82.1%であることからみても、 a の符号を求めることは容易であることがわかる。

数学問題Cの6.(偶関数の y 軸との交点での傾きを考える問題)の正答率が60.3%であることからみて、 c の符号を求めることについても、難しいものではない。

$f(0) = d$ より、グラフと y 軸との交点の y 座標が d であるから、 d の符号を求めるのは簡単である。

また、数学問題Cの3.(グラフ変曲点に関する問題)の正答率72.2%であるので、

$f''(x) = 6ax + 2b = 0$ から、変曲点の x 座標が $x = -\frac{b}{3a}$ であることを求めるのは、難し

いものでない。したがって、グラフから変曲点の x 座標が正と $a > 0$ から b の符号を求めることは、そんなに難しいことではないと思われる。

こうしたことから、この問題の正答期待値を60%とした。

この問題の正答率の低さは、微分を利用して、与えられた具体的な関数については、増減や凹凸を調べ、グラフを書くことができるが、変曲点の性質についての理解が不十分であること示していると考えられる。

(深瀬幹雄委員)

(4) 数学Ⅲ・Cの問題の正答率は次表の通りである。全問題の平均正答率を下回ったものが4題だけであり、全体的には好成績である。

ⅢCは本年度に学習しているものであり当然とも考えられる。なお、表の右端の数値は、学校毎に算出した正答率の分布に関する標準偏差 σ の値である。

正答率			学校毎正答率分布	
の順位	問題番号	問題の内容	正答率	の標準偏差 σ
①	B3	媒介変数表示(三角関数)された関数の導関数	79.0	16.1
②	C3	変曲点の性質	72.2	16.0
③	A3	媒介変数表示(分数式)された曲線の方程式(双曲線)	71.4	17.5
④	C2	2次分数関数のグラフを選ぶ	67.3	14.0
⑤	B5	媒介変数表示(指数対数関数)された点の速度ベクトル	67.2	20.0
⑥	D3	無限等比級数の和	65.2	20.3
⑦	C4	合成関数の微分	63.6	17.2
⑧	A5	3次関数の変曲点などから係数を決定する	63.2	21.2
⑨	D6	行列の積の交換可能条件	62.0	22.0
⑩	B6	関数の極限(関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の微分係数 $f'(2)$)	59.0	18.2
⑪	B7	放射性元素の半減期(指数にある未知数を $\log$ を使って解く)	56.7	20.1
全問題の正答率の平均値			55.9	
⑫	A8	微分法の応用(円柱の体積を最大にする半径)	52.6	17.5
⑬	D7	媒介変数表示(三角関数)された点の軌跡	52.3	19.4
⑭	A7	導関数や2次導関数の符号からグラフを選ぶ	51.5	22.0
⑮	B8	定積分(置換積分)	48.2	17.0

正答率が最も低い⑮B8は置換積分の定積分の問題であり、未習の生徒がいたかもしれないが、積分は生徒にとって難しいことを示している。指導に一層留意したい。また、⑭A7から2次導関数の符号とグラフとの関係、⑬D7から三角関数の式変形が定着しにくい内容であることが分かる。これらについては指導に一層の工夫が必要であろう。⑫A8は数学Ⅱでも学習している内容であり、残念な結果である。直径を変数にして求めてそのまま(イ)を選んだり、単純な計算間違いが原因と思われる。

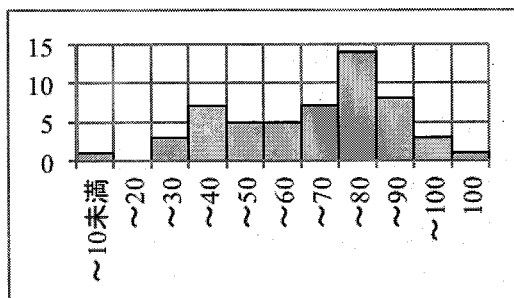
学校毎平均正答率分布の標準偏差 σ は学校間格差を表しており、この値が大きい問題は各学校での指導に差があるものと考えられる。標準偏差 $\sigma > 20$ であるものについて、問題と学校毎平均正答率の分布を以下に示す。参加各校で状況の把握に役立てていただきたい。

D 6. x, y は実数です。

$$\text{行列 } A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

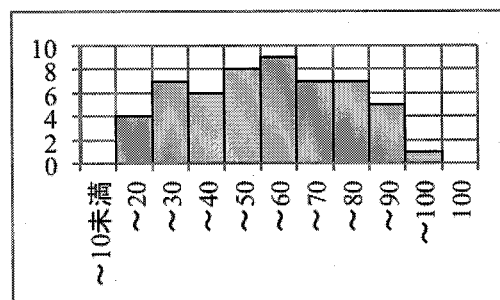
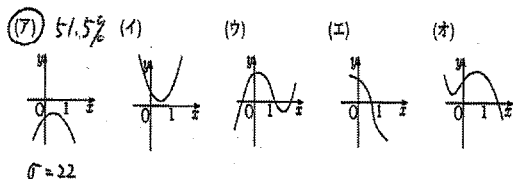
の積が交換可能になるための必要十分条件は、つぎのどれですか。

- (ア) $x=0$ (イ) $y=0$ (ウ) $x=y$
 (エ) $x=0$ または $y=0$ (オ) $x=0$ かつ $y=0$
 62.2% $\sigma=2.2$



正答率 70%以上～80%未満にピークがあり、本来ならこれが平均正答率であろう。
 未習の学校の影響が少なくないのかもしれない。

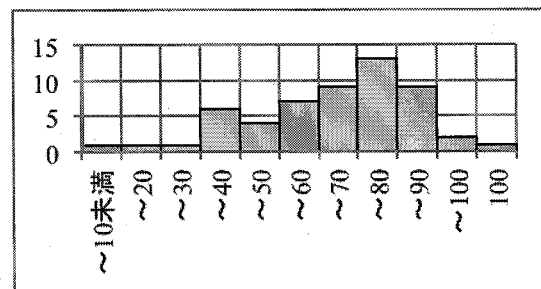
A 7. 関数 $f(x)$ について、「 $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$ かつ $f''(x)$ は定義域のすべての x に対して負」という条件が与えられているとき、下のグラフの中で、この条件を満たすものはどれですか。



平均正答率が低い方から2番目の問題であり、個人だけでなく学校間でも2次導関数の性質の定着にバラつきがあると思われる。

A 5. 関数 $y = 3x^3 + 6x^2 + kx + 9$ のグラフの変曲点における接線の傾きが0となるとすれば、 k の値はいくらですか。

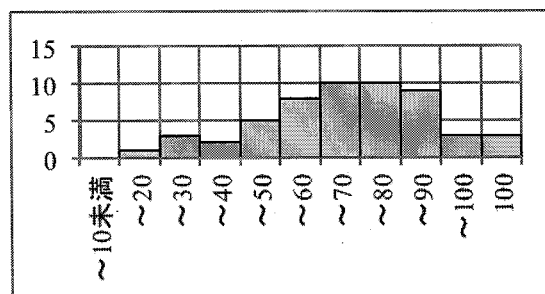
- (ア) 0 (イ) 1 (ウ) 2 (エ) 3 (オ) 4
 63.2%
 $\sigma=2.2$



前問に引き続き、これも2次導関数の問題である。指導に留意したい。

D 3. 無限等比級数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ の和は、つぎのどれですか。

- (ア) $\frac{5}{8}$ (イ) $\frac{2}{3}$ (ウ) $\frac{3}{5}$ (エ) $\frac{3}{2}$ (オ) ∞
 65.2%
 $\sigma=2.2$



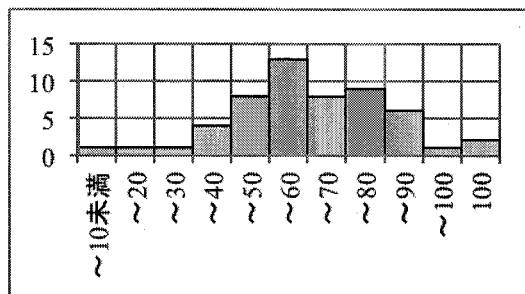
分布のピークは70%位で、分布は標準偏差の値以上にバラついているように見える。
 しかし単純な問題なので、個々の誤りは計算間違いが多いと思われる。

B 7. 放射性元素は、つぎの式に従って崩壊します。

$$y = y_0 \cdot e^{-kt}$$

ただし、 y は t 日後に残っている元素の量、 y_0 は $t=0$ のときの y の値を示します。
半減期（その元素の半量が崩壊するまでの時間）が 4 日である元素の定数 k の値は、
つぎのどれですか。

- (ア) $\frac{1}{4} \log_2 2$ 56.7% (イ) $\log_2 \frac{1}{2}$ (ウ) $\log_2 e$
(エ) $(\log_2 2)^{\frac{1}{4}}$ (オ) $2e^4$ $\sigma = 2.01$



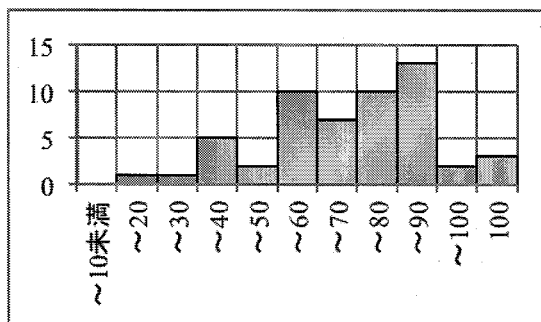
前問と同様、標準偏差の値以上にバラついているように見える。e を底とする指数関数なので数学Ⅲとしたが、内容的には数学Ⅱの問題であり、その定着に問題があると思われる。

B 5. 時刻 t ($t > 0$) において、座標平面上の動点 (x, y) が

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \log(1+2t) \end{cases}$$

と表されるとき、時刻 t での速度ベクトルは、つぎのどれになりますか。

- (ア) $(e^{-t}, \log(1+2t))$ (イ) $(e^{-t}, \frac{1}{1+2t})$ (ウ) $(-e^{-t}, \frac{2}{1+2t})$ 67.2%
(エ) $(-e^{-t}, \frac{1}{1+2t})$ (オ) $(-1, \frac{1}{t})$ $\sigma = 2.0$



分布にピークが 4 つあり、これも標準偏差の値以上にバラついているように見える。学校での指導の有無で差が出た問題であろう。

(鈴木清夫委員)

3 IRT による成績（項目）分析

ここでは、これまでの調査結果をもとにして、「IRT（項目反応理論）による分析」を行い、その結果を第44回数学教育論文発表会（上越教育大，2011. 11. 12～13）及び東京理科大学数学教育研究会月例会（2011. 1. 28）で発表した要約を掲載する。

基礎学力調査のIRTによる分析

東京理科大学

眞田克典

数理検定協会

奥井圭介

NTTデータCCS

渡邊博史

東京理科大学

澤田利夫

東京理科大学 総合教育機構理数教育研究センター 数学教育研究部門

Research Institute for Mathematics Education

2012年1月28日 東京理科大学数学教育研究会 1月 月例会

平成23年度 理大特色ある教育研究助成金

「理数系高校生対象数学基礎学力調査と項目反応理論によるコンピュータ適応型数学テストシステムへの応用の研究」



1. 学力調査を9月～10月に実施・集計し，正答率等の統計量およびその推移などの分析を行うとともに，理数系高校生の学習到達度のデータを収集・公表する
2. **結果をIRTで分析**して，そのデータベースを利用した適応型テストを作る

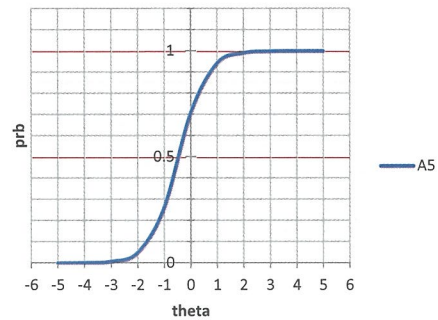
2011年 項目パラメータ(a:識別力, b:困難度)

項目番号	a	b
1001		
1002		
1003	1.12897	-0.40832
1004	0.48176	0.10187
1005		
1006		
1007		
1008		
1009		
1010		
1011	0.37056	-2.57687
1012	0.55976	-0.78118
1013	0.99875	-0.56209
1014		
1015		
1016	0.62033	1.14889
1017	0.71894	-0.10091
1018		
1019		
1020	0.87005	0.68115
1021	0.51294	-1.33039
1022		
1023	0.63387	-0.19450
1024	0.61481	-0.63481
1025	0.78179	-1.85144
1026		
1027	0.71871	-0.28769
1028		
1029		
1030	0.47300	0.06396
1031	0.56882	-0.85300
1032	0.88882	-0.33048
1033	0.98036	-1.08071
1034	0.77142	-0.80371
1035		
1036	0.74826	-0.51245
1037		
1038	0.78871	0.87789
1039		
1040		
1041	0.27475	1.70689
1042	0.78823	-0.94811
1043	0.78823	-0.94811
1044	0.78823	-0.94811
1045	0.78823	-0.94811
1046	0.78823	-0.94811
1047	0.78823	-0.94811
1048	0.78823	-0.94811
1049	0.78823	-0.94811
1050	0.78823	-0.94811
1051	0.78823	-0.94811
1052	0.78823	-0.94811
1053	0.78823	-0.94811
1054	0.78823	-0.94811
1055	0.78823	-0.94811
1056	0.78823	-0.94811
1057	0.78823	-0.94811
1058	0.78823	-0.94811
1059	0.78823	-0.94811
1060	0.78823	-0.94811
1061	0.78823	-0.94811
1062	0.78823	-0.94811
1063	0.78823	-0.94811
1064	0.78823	-0.94811
1065	0.78823	-0.94811
1066	0.78823	-0.94811
1067	0.78823	-0.94811
1068	0.78823	-0.94811
1069	0.78823	-0.94811
1070	0.78823	-0.94811
1071	0.78823	-0.94811
1072	0.78823	-0.94811
1073	0.78823	-0.94811
1074	0.78823	-0.94811
1075	0.78823	-0.94811

項目特性曲線
ICC

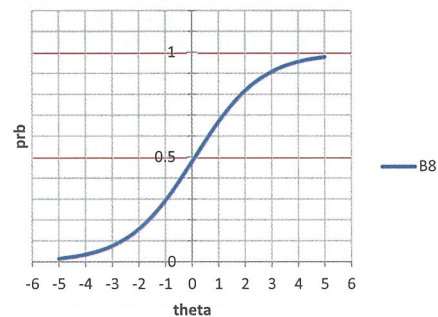
$a = 1.129$ $b = -0.460$

A5(2011年)



B8(2011年)

$a = 0.467$ $b = 0.102$



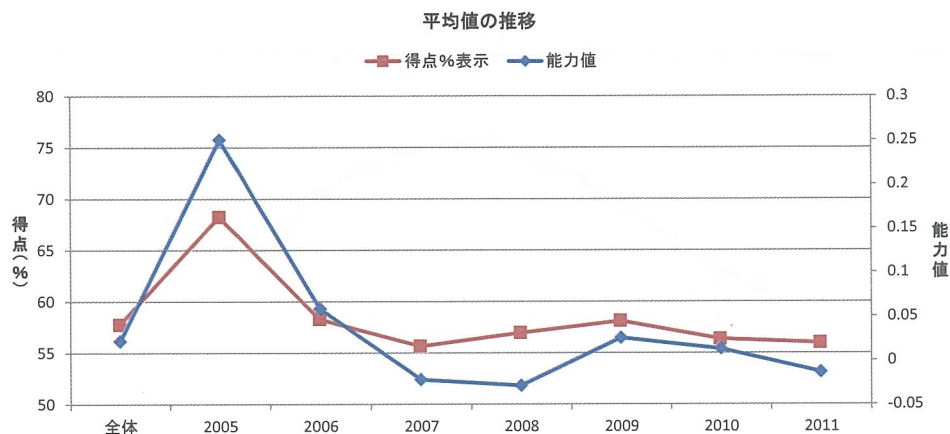
2005年～2011年 項目パラメータの等化

項目番号	a	b
1001		
1002		
1003	1.12897	-0.40832
1004	0.48176	0.10187
1005		
1006		
1007		
1008		
1009		
1010		
1011	0.37056	-2.57687
1012	0.55976	-0.78118
1013	0.99875	-0.56209
1014		
1015		
1016	0.62033	1.14889
1017	0.71894	-0.10091
1018		
1019		
1020	0.87005	0.68115
1021	0.51294	-1.33039
1022		
1023	0.63387	-0.19450
1024	0.61481	-0.63481
1025	0.78179	-1.85144
1026		
1027	0.71871	-0.28769
1028		
1029		
1030	0.47300	0.06396
1031	0.56882	-0.85300
1032	0.88882	-0.33048
1033	0.98036	-1.08071
1034	0.77142	-0.80371
1035		
1036	0.74826	-0.51245
1037		
1038	0.78871	0.87789
1039		
1040		
1041	0.27475	1.70689
1042	0.78823	-0.94811
1043	0.78823	-0.94811
1044	0.78823	-0.94811
1045	0.78823	-0.94811
1046	0.78823	-0.94811
1047	0.78823	-0.94811
1048	0.78823	-0.94811
1049	0.78823	-0.94811
1050	0.78823	-0.94811
1051	0.78823	-0.94811
1052	0.78823	-0.94811
1053	0.78823	-0.94811
1054	0.78823	-0.94811
1055	0.78823	-0.94811
1056	0.78823	-0.94811
1057	0.78823	-0.94811
1058	0.78823	-0.94811
1059	0.78823	-0.94811
1060	0.78823	-0.94811
1061	0.78823	-0.94811
1062	0.78823	-0.94811
1063	0.78823	-0.94811
1064	0.78823	-0.94811
1065	0.78823	-0.94811
1066	0.78823	-0.94811
1067	0.78823	-0.94811
1068	0.78823	-0.94811
1069	0.78823	-0.94811
1070	0.78823	-0.94811
1071	0.78823	-0.94811
1072	0.78823	-0.94811
1073	0.78823	-0.94811
1074	0.78823	-0.94811
1075	0.78823	-0.94811

2005年～2011年の
項目パラメータを
等化し, そのデータ
を利用する

能力値と得点の推移(2005年～2011年)

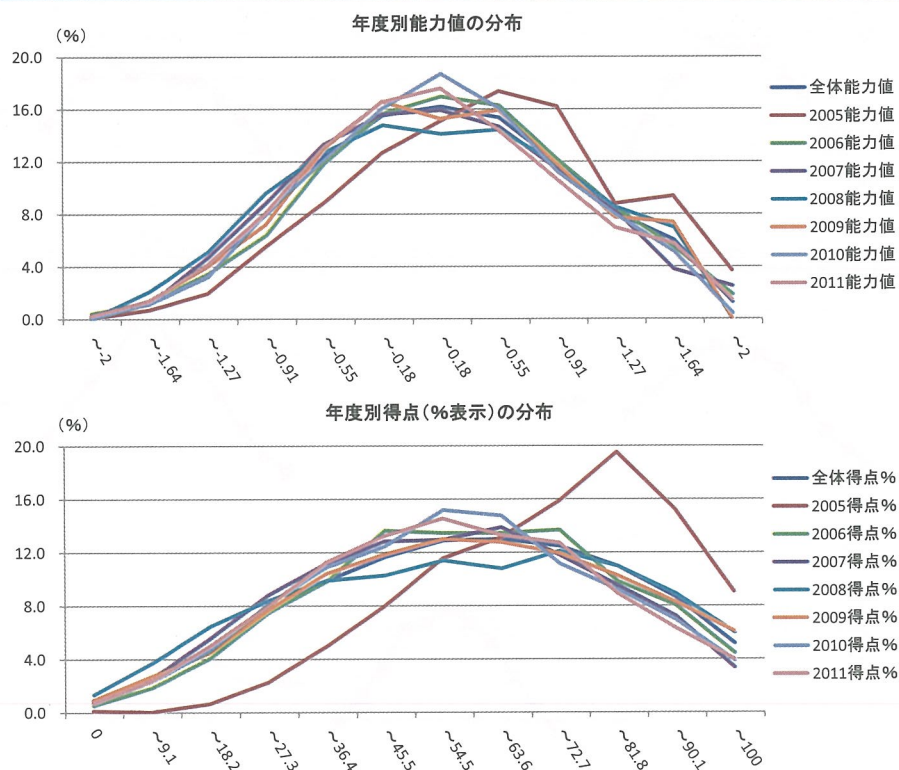
被験者数 26,253人 等化した項目パラメータを用いて推定した平均能力値の推移



年度	全体	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
能力値	0.021	0.250	0.058	-0.022	-0.029	0.025	0.013	-0.014
得点%表示	57.698	68.172	58.222	55.597	56.904	58.063	56.310	55.941

5

能力値と得点の度数分布

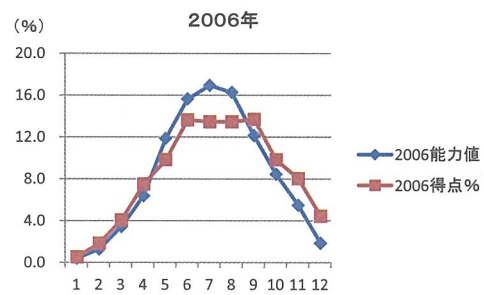
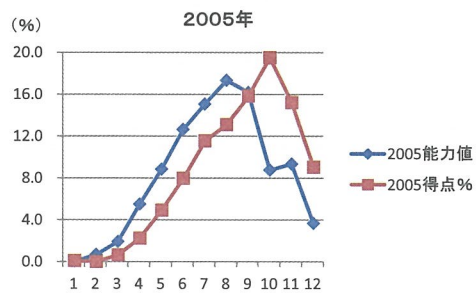
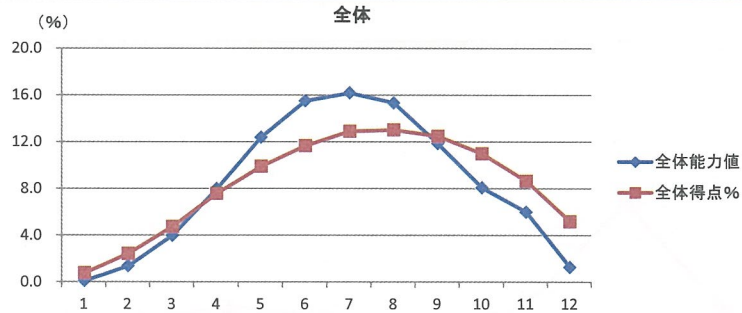


6

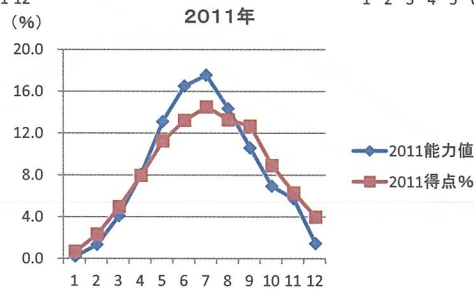
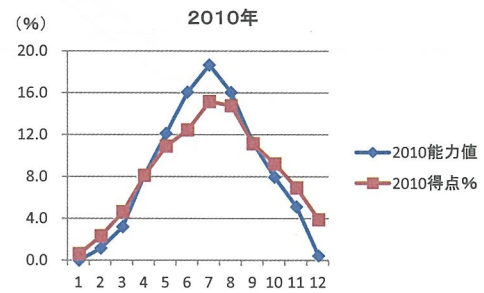
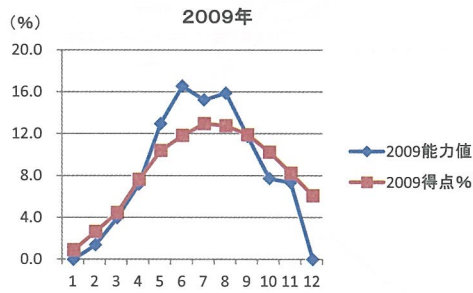
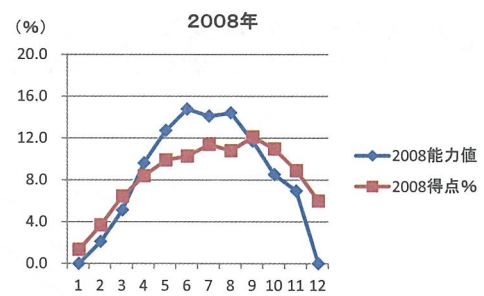
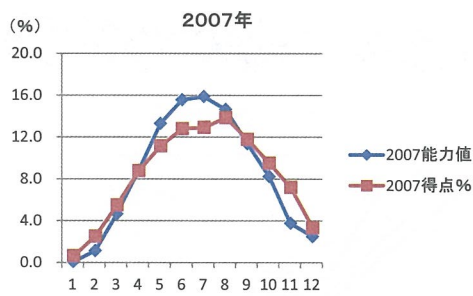
能力値と得点の度数分布 年度別

能力値と得点の比較のため、以下のグラフの横軸は1～12までの区間で表示しています。

区間	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
能力値	～-2	～-1.64	～-1.27	～-0.91	～-0.55	～-0.18	～0.18	～0.55	～0.91	～1.27	～1.64	～2
得点%	0	～9.1	～18.2	～27.3	～36.4	～45.5	～54.5	～63.6	～72.7	～81.8	～90.1	～100

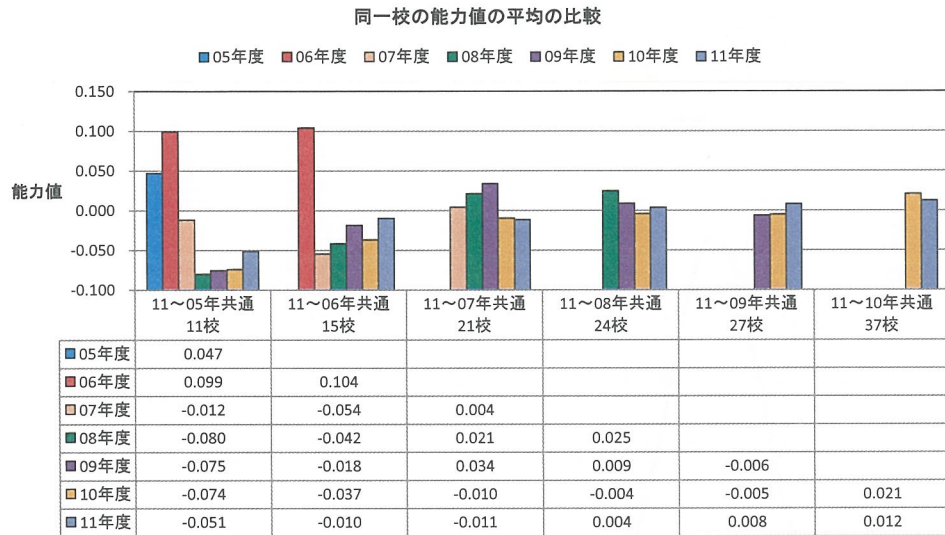


7



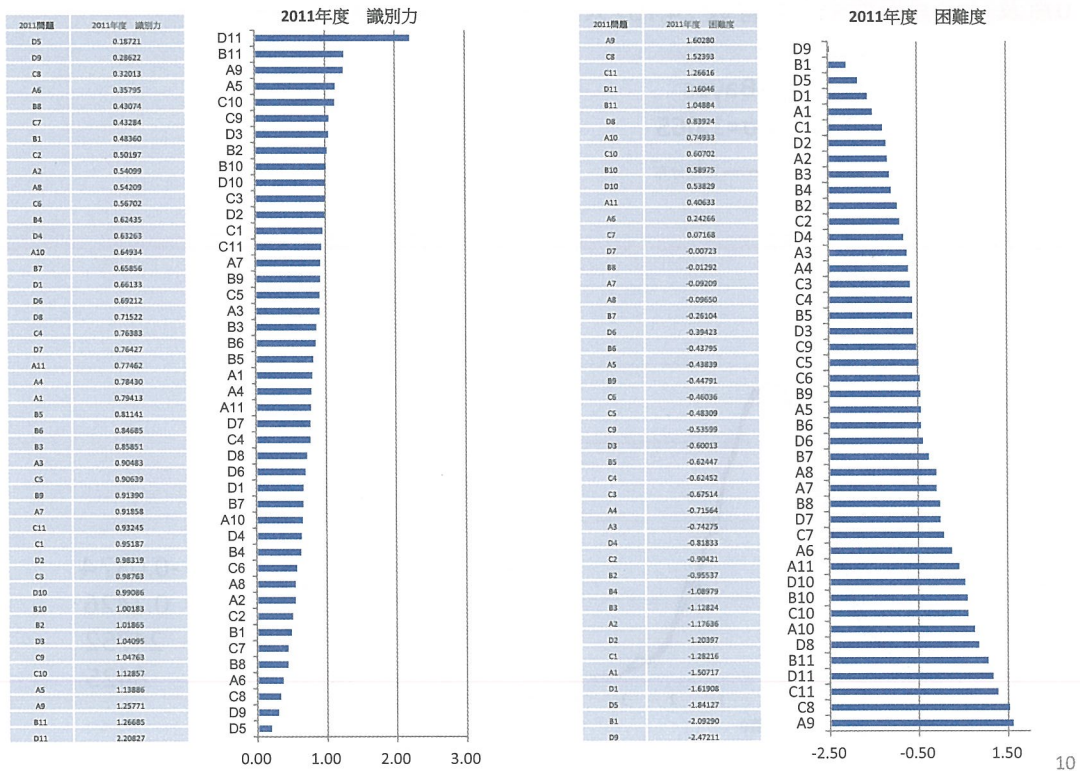
8

同一校の能力値の平均の比較



9

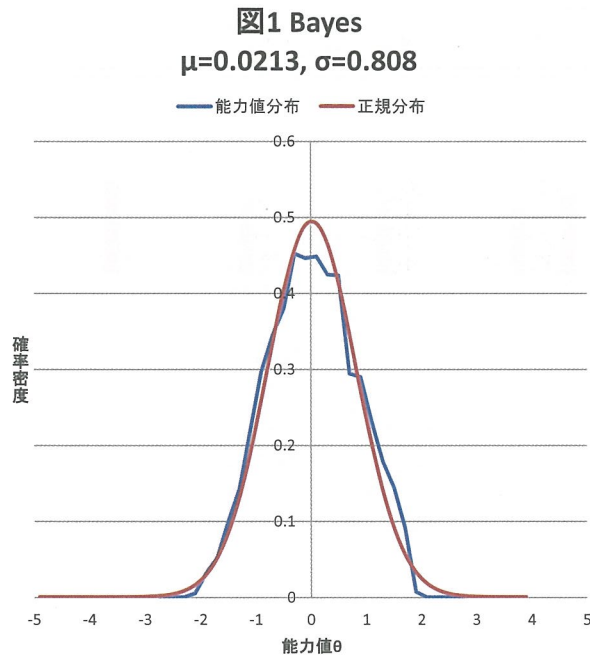
識別力と困難度



10

ベイズ推定による能力値の分布について

被験者数 26,253人



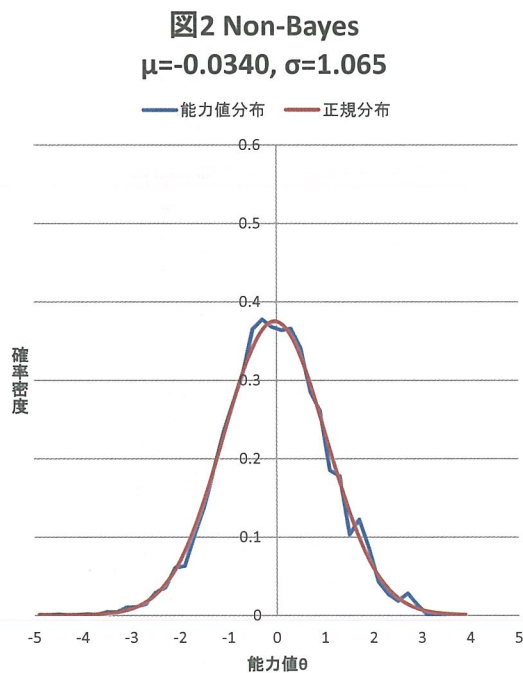
参考:

歪度s	-0.0055
尖度k	-0.6005
データ数n	26253
JB	14180

11

ベイズ推定でない能力値の分布について

0点及び満点を除く被験者数 24,752人



参考:

歪度s	-0.0374
尖度k	0.1426
データ数n	24752
JB	8425

12