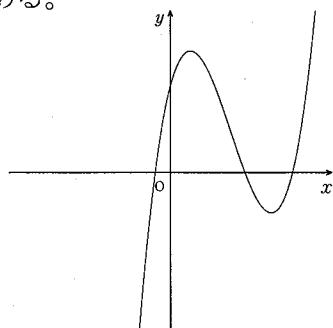


(半田 真委員)

(3) 問題 右の3次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフである。

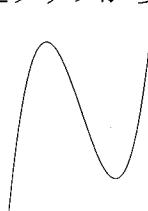
係数 a, b, c, d の符号を求めなさい。



この問題の正答率が、33.8%と低いことについて考えてみる。

問題は3次関数の与えられたグラフから、各次数の係数と定数項の符号を求める問題である。

x^3 の係数は、グラフの形が



であるから、 $a > 0$ である。

数学問題Bの1.(3次関数のグラフから関数の3次式を求める問題)の正答率が82.1%であることからみても、 a の符号を求ることは容易であることがわかる。

数学問題Cの6.(偶関数のy軸との交点での傾きを考える問題)の正答率が60.3%であることからみて、 c の符号を求ることについても、難しいものではない。

$f(0)=d$ より、グラフとy軸との交点のy座標が d であるから、 d の符号を求めるのは簡単である。

また、数学問題Cの3.(グラフ変曲点に関する問題)の正答率72.2%であるので、

$f''(x) = 6ax + 2b = 0$ から、変曲点の x 座標が $x = -\frac{b}{3a}$ であることを求めるのは、難しいものでない。したがって、グラフから変曲点の x 座標が正と $a > 0$ から b の符号を求ることは、そんなに難しいことではないと思われる。

こうしたことから、この問題の正答期待値を60%とした。

この問題の正答率の低さは、微分を利用して、与えられた具体的な関数については、増減や凹凸を調べ、グラフを書くことができるが、変曲点の性質についての理解が不十分であること示していると考えられる。

(深瀬幹雄委員)

(4) 数学III・Cの問題の正答率は次表の通りである。全問題の平均正答率を下回ったものが4題だけであり、全体的には好成績である。

III Cは本年度に学習しているものであり当然とも考えられる。なお、表の右端の数値は、学校毎に算出した正答率の分布に関する標準偏差 σ の値である。

正答率			学校毎正答率分布	
の順位	問題番号	問題の内容	正答率	の標準偏差 σ
①	B3	媒介変数表示(三角関数)された関数の導関数	79.0	16.1
②	C3	変曲点の性質	72.2	16.0
③	A3	媒介変数表示(分数式)された曲線の方程式(双曲線)	71.4	17.5
④	C2	2次分數関数のグラフを選ぶ	67.3	14.0
⑤	B5	媒介変数表示(指数対数関数)された点の速度ベクトル	67.2	20.0
⑥	D3	無限等比級数の和	65.2	20.3
⑦	C4	合成関数の微分	63.6	17.2
⑧	A5	3次関数の変曲点などから係数を決定する	63.2	21.2
⑨	D6	行列の積の交換可能条件	62.0	22.0
⑩	B6	関数の極限(関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の微分係数 $f'(2)$)	59.0	18.2
⑪	B7	放射性元素の半減期(指数にある未知数を \log を使って解く)	56.7	20.1
全問題の正答率の平均値			55.9	
⑫	A8	微分法の応用(円柱の体積を最大にする半径)	52.6	17.5
⑬	D7	媒介変数表示(三角関数)された点の軌跡	52.3	19.4
⑭	A7	導関数や2次導関数の符号からグラフを選ぶ	51.5	22.0
⑮	B8	定積分(置換積分)	48.2	17.0

正答率が最も低い⑮B8は置換積分の定積分の問題であり、未習の生徒がいたかもしれないが、積分は生徒にとって難しいことを示している。指導に一層留意したい。また、⑭A7から2次導関数の符号とグラフとの関係、⑬D7から三角関数の式変形が定着しにくい内容であることが分かる。これらについては指導に一層の工夫が必要であろう。⑫A8は数学Ⅱでも学習している内容であり、残念な結果である。直徑を変数にして求めてそのまま(イ)を選んだり、単純な計算間違いが原因と思われる。

学校毎平均正答率分布の標準偏差 σ は学校間格差を表しており、この値が大きい問題は各学校での指導に差があるものと考えられる。標準偏差 $\sigma > 20$ であるものについて、問題と学校毎平均正答率の分布を以下に示す。参加各校で状況の把握に役立てていただきたい。

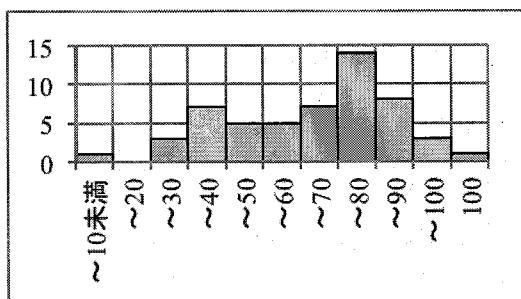
D 6. x, y は実数です。

$$\text{行列 } A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

の積が交換可能になるための必要十分条件は、つぎのどれですか。

- (7) $x=0$ (イ) $y=0$ (ウ) $x=y$
 (エ) $x=0$ または $y=0$ (オ) $x=0$ かつ $y=0$
- $\hat{\sigma} = 22$

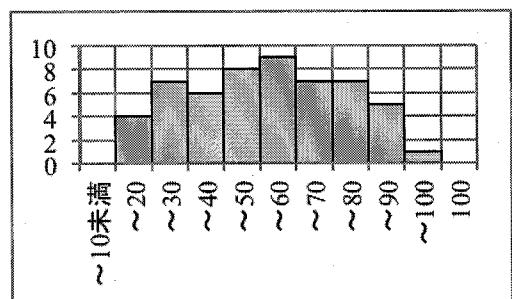
正答率 70%以上～80%未満にピークがあり、本来ならこれが平均正答率であろう。未習の学校の影響が少くないのかもしれない。



A 7. 関数 $f(x)$ について、「 $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$ かつ $f''(x)$ は定義域のすべての x に対して負」という条件が与えられているとき、下のグラフの中で、この条件を満たすものはどれですか。

- (7) 51.5% (イ) (ウ) (エ) (オ)

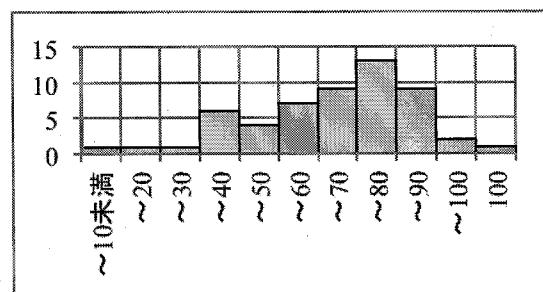
 $\hat{\sigma} = 22$



平均正答率が低い方から 2 番目の問題であり、個人だけでなく学校間でも 2 次導関数の性質の定着にバラつきがあると思われる。

A 5. 関数 $y = 3x^3 + 6x^2 + kx + 9$ のグラフの変曲点における接線の傾きが 0 となるとすれば、 k の値はいくらですか。

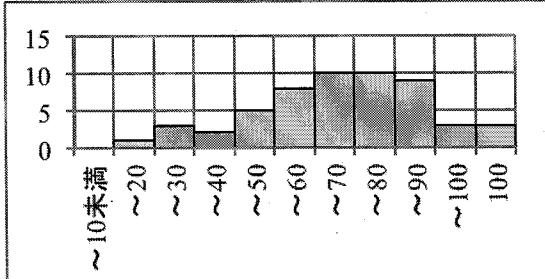
- (7) 0 (イ) 1 (ウ) 2 (エ) 3 (オ) 4
 $\hat{\sigma} = 21.2$



前回に引き続き、これも 2 次導関数の問題である。指導に留意したい。

D 3. 無限等比級数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ の和は、つぎのどれですか。

- (7) $\frac{5}{8}$ (イ) $\frac{2}{3}$ 65.2% (ウ) $\frac{3}{5}$ (エ) $\frac{3}{2}$ (オ) ∞
 $\hat{\sigma} = 21.3$



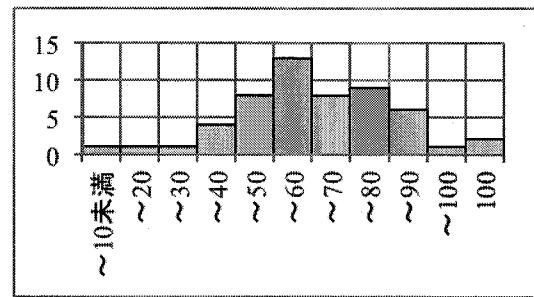
分布のピークは 70%位で、分布は標準偏差の値以上にバラついているように見える。しかし単純な問題なので、個々の誤りは計算間違いが多いと思われる。

B 7. 放射性元素は、つぎの式に従って崩壊します。

$$y = y_0 \cdot e^{-kt}$$

ただし、 y は t 日後に残っている元素の量、 y_0 は $t=0$ のときの y の値を示します。
半減期（その元素の半分が崩壊するまでの時間）が4日である元素の定数 k の値は、
つぎのどれですか。

- (7) $\frac{1}{4} \log_e 2$ 56.7% (1) $\log_e \frac{1}{2}$ (4) $\log_2 e$
 (2) $(\log_e 2)^{\frac{1}{4}}$ (3) $2e^4$ (5) e^{20}



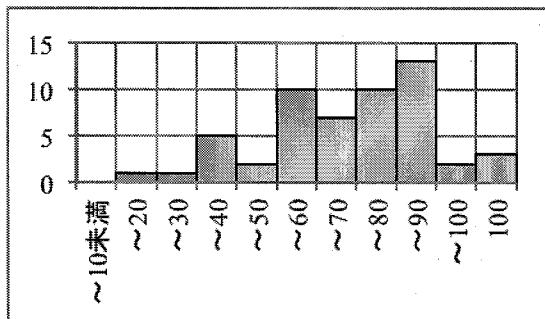
前問と同様、標準偏差の値以上にバラついているように見える。 e を底とする指數関数なので数学IIIとしたが、内容的には数学IIの問題であり、その定着に問題があると思われる。

B 5. 時刻 t ($t > 0$)において、座標平面上の動点 (x, y) が

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \log(1+2t) \end{cases}$$

と表されるとき、時刻 t での速度ベクトルは、つぎのどれになりますか。

- (7) $(e^{-t}, \log(1+2t))$ (1) $(e^{-t}, \frac{1}{1+2t})$ (4) $(-e^{-t}, \frac{2}{1+2t})$
 (2) $(-e^{-t}, \frac{1}{1+2t})$ (3) $(-1, \frac{1}{t})$ (5) $(-e^{-t}, -\frac{2}{1+2t})$



分布にピークが4つあり、これも標準偏差の値以上にバラついているように見える。
学校での指導の有無で差が出た問題であろう。

(鈴木清夫委員)

3 IRTによる成績（項目）分析

ここでは、これまでの調査結果をもとにして、「IRT（項目反応理論）による分析」を行い、その結果を第44回数学教育論文発表会（上越教育大、2011.11.12～13）及び東京理科大学数学教育研究会月例会（2012.1.28）で発表した要約を掲載する。

基礎学力調査のIRTによる分析

東京理科大学

NTTデータCCS

眞田克典

渡邊博史

数理検定協会

東京理科大学

奥井圭介

澤田利夫

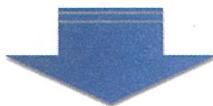
東京理科大学 総合教育機構理数教育研究センター 数学教育研究部門

Research Institute for Mathematics Education

2012年1月28日 東京理科大学数学教育研究会 1月 月例会

平成23年度 理大特色ある教育研究助成金

「理数系高校生対象数学基礎学力調査と項目反応理論によるコンピュータ適応型数学テストシステムへの応用の研究」



- { 1. 学力調査を9月～10月に実施・集計し、正答率等の統計量およびその推移などの分析を行うとともに、理数系高校生の学習到達度のデータを収集・公表する
2. 結果をIRTで分析して、そのデータベースを利用した適応型テストを作る }

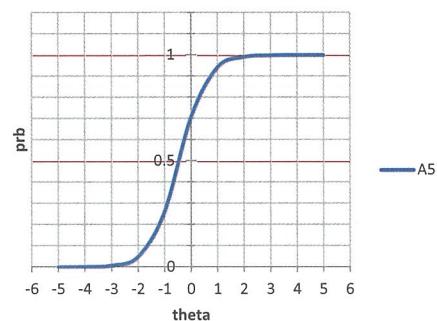
2011年 項目パラメータ(a:識別力, b:困難度)

項目番号	a	b
1001		
1002		
1003	1.12987	-0.45972
1004	0.49726	0.10187
1005		
1006		
1007		
1008		
1009		
1010		
1011	0.37098	-0.27987
1012	0.50978	-0.76118
1013	0.68375	-0.56299
1014		
1015		
1016	0.65930	1.14099
1017	0.71484	-0.15951
1018		
1019		
1020		
1021	0.53808	0.66115
1022	0.51254	-1.35338
1023		
1024		
1025	0.61287	-0.39458
1026	0.65481	-0.62481
1027	0.76179	-1.85144
1028		
1029		
1030		
1031	0.47100	0.64296
1032	0.58882	-0.65700
1033	0.68903	-0.35048
1034	0.68626	-1.06871
1035	0.77148	-0.93271
1036		
1037	0.74048	-0.51245
1038		
1039		
1040		
1041		
1042	0.57475	1.10680
1043	0.76026	-0.94211
1044		
1045	0.36004	0.62374
1046		
1047		
1048		
1049		
1050		
1051	0.64274	-0.83270
1052		
1053	0.38479	-2.33909
1054		
1055	0.60208	-1.71914
1056	0.64238	-0.99447
1057	0.67164	0.41140
1058	0.65230	-0.64630
1059	0.63473	-0.96934
1060		
1061	0.10803	2.67329
1062	0.44937	-0.26379
1063	1.05413	-0.03592
1064	0.69606	-0.06710
1065	0.70209	0.01161
1066	0.72481	-1.13124
1067	0.72798	0.32089
1068	0.69187	0.56899
1069	1.16702	1.13134
1070		
1071	0.38910	-0.16249
1072	1.44375	1.14343
1073	0.65964	-0.11962
1074	0.62153	1.90207
1075	0.41266	-1.16214

項目特性曲線
ICC

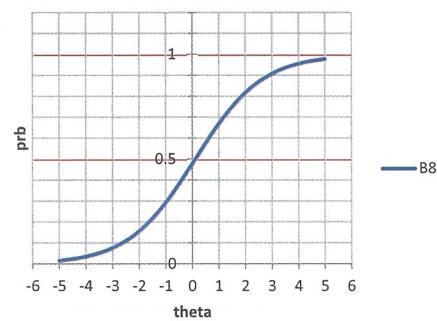
$$a = 1.129 \quad b = -0.460$$

A5(2011年)



$$a = 0.467 \quad b = 0.102$$

B8(2011年)



2005年～2011年 項目パラメータの等化

項目番号	a	b
1001		
1002		
1003	1.12897	-0.45972
1004	0.49726	0.10187
1005		
1006		
1007		
1008		
1009		
1010		
1011	0.37098	-0.27987
1012	0.50978	-0.76118
1013	0.68375	-0.56299
1014		
1015		
1016	0.65930	1.14099
1017	0.71484	-0.15951
1018		
1019		
1020		
1021	0.36004	0.62374
1022		
1023	0.64274	-0.83270
1024		
1025	0.38479	-2.33909
1026		
1027	0.57475	1.10680
1028	0.76026	-0.94211
1029		
1030		
1031	0.62153	1.90207
1032	0.41266	-1.16214
1033		
1034		
1035		
1036		
1037		
1038		
1039		
1040		
1041		
1042	0.74048	-0.51245
1043		
1044		
1045		
1046		
1047		
1048		
1049		
1050		
1051	0.10803	2.67329
1052	0.44937	-0.26379
1053	1.05413	-0.03592
1054	0.69606	-0.06710
1055	0.70209	0.01161
1056	0.72481	-1.13124
1057	0.72798	0.32089
1058	0.69187	0.56899
1059	1.16702	1.13134
1060		
1061	0.38910	-0.16249
1062	1.44375	1.14343
1063	0.65964	-0.11962
1064	0.62153	1.90207
1065	0.41266	-1.16214



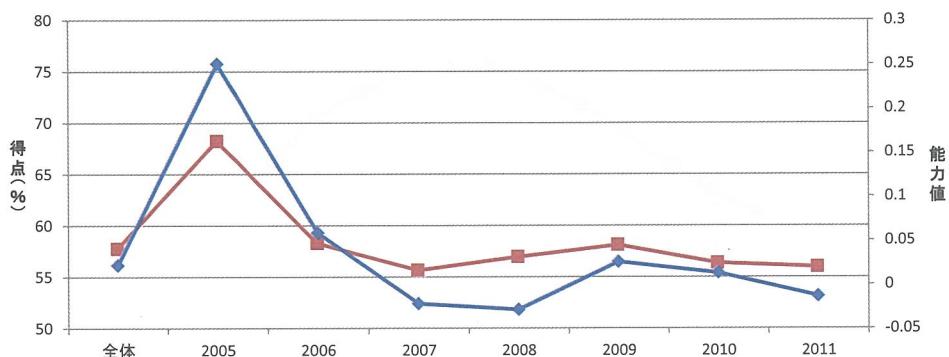
2005年～2011年の
項目パラメータを
等化し、そのデータ
を利用する

能力値と得点の推移(2005年～2011年)

被験者数 26,253人 等化した項目パラメータを用いて推定した平均能力値の推移

平均値の推移

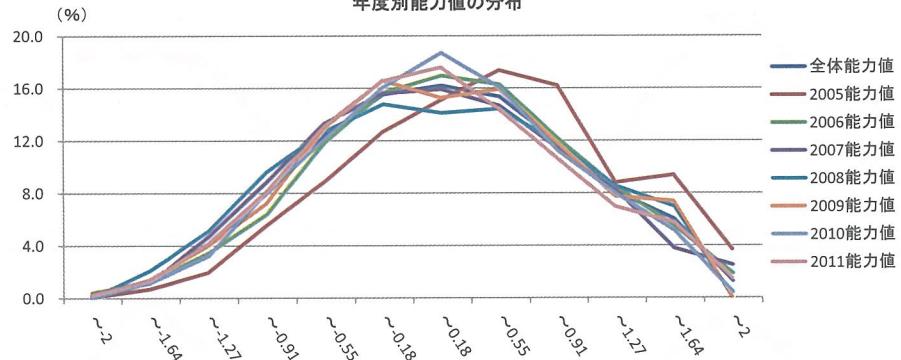
■ 得点%表示 ◆ 能力値



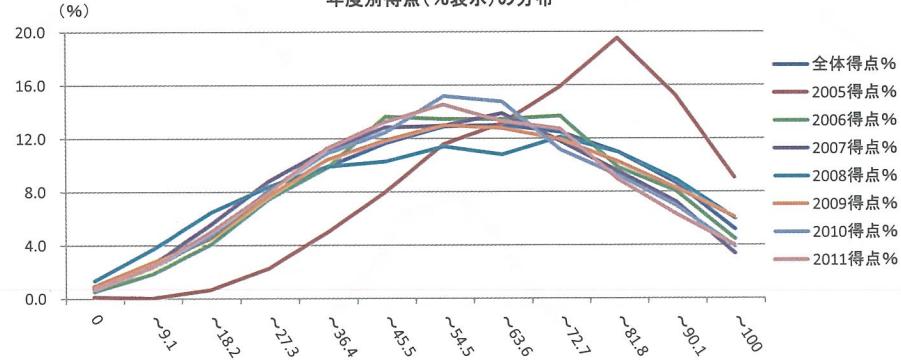
5

能力値と得点の度数分布

年度別能力値の分布



年度別得点(%表示)の分布

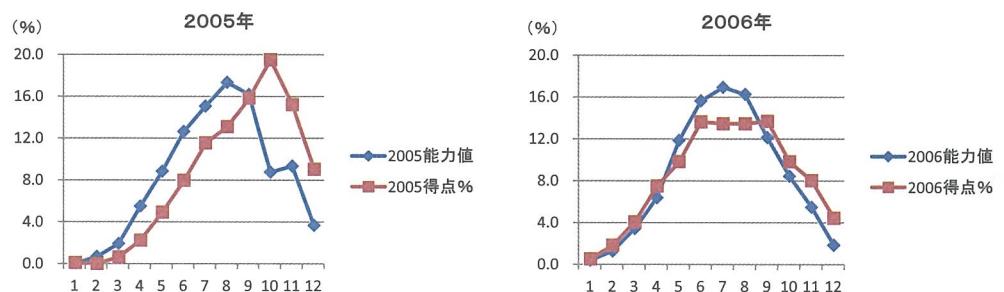
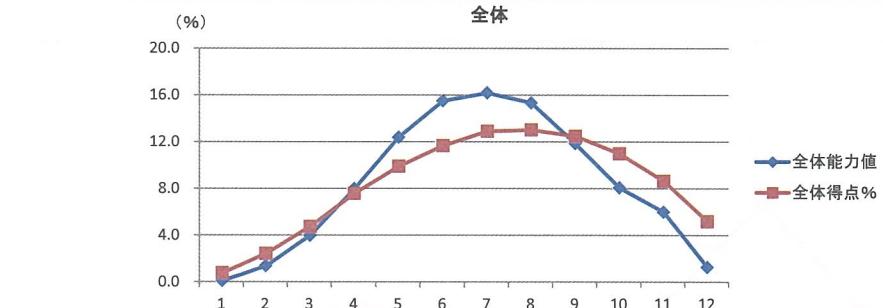


6

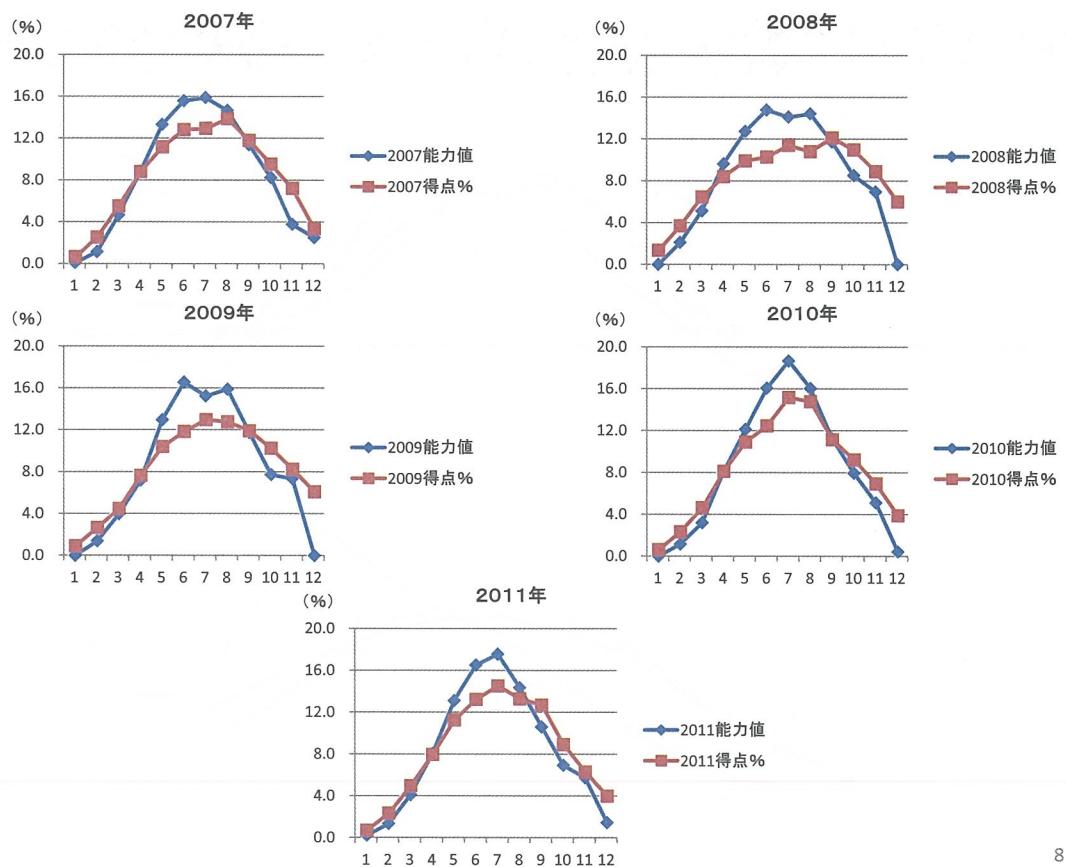
能力値と得点の度数分布 年度別

能力値と得点の比較のため、以下のグラフの横軸は1~12までの区間で表示しています。

区間	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
能力値	~ -2	~ -1.64	~ -1.27	~ -0.91	~ -0.55	~ -0.18	~ 0.18	~ 0.55	~ 0.91	~ 1.27	~ 1.64	~ 2
得点%	0	~ 9.1	~ 18.2	~ 27.3	~ 36.4	~ 45.5	~ 54.5	~ 63.6	~ 72.7	~ 81.8	~ 90.1	~ 100



7

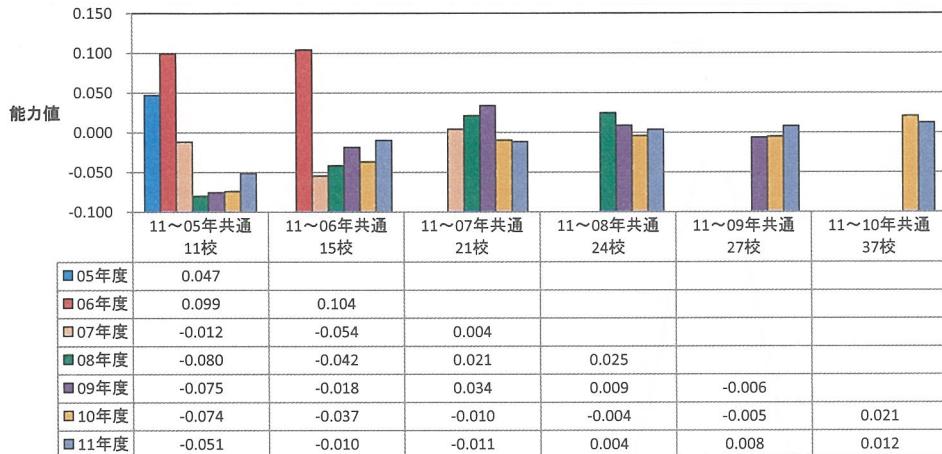


8

同一校の能力値の平均の比較

同一校の能力値の平均の比較

■05年度 ■06年度 ■07年度 ■08年度 ■09年度 ■10年度 ■11年度



9

識別力と困難度

2011問題	2011年度 識別力
D5	0.18721
D9	0.28622
C8	0.32013
A6	0.35795
B8	0.4074
C7	0.43284
B1	0.43360
C2	0.50197
A2	0.54099
A8	0.54209
C6	0.56702
B4	0.62435
D4	0.63263
A10	0.64934
B7	0.65856
D1	0.66133
D6	0.69212
D8	0.71522
C4	0.76383
D7	0.76427
A11	0.77462
A4	0.78430
A1	0.79413
B5	0.81141
B6	0.84685
B3	0.85881
A3	0.90483
C5	0.90639
B9	0.91390
A7	0.91558
C11	0.93245
C1	0.95187
D2	0.98319
C3	0.98763
D10	0.99086
B10	1.00183
B2	1.01865
D3	1.04095
C9	1.04763
C10	1.12857
A5	1.13886
A9	1.25771
B11	1.26685
D11	2.20827

2011年度 識別力

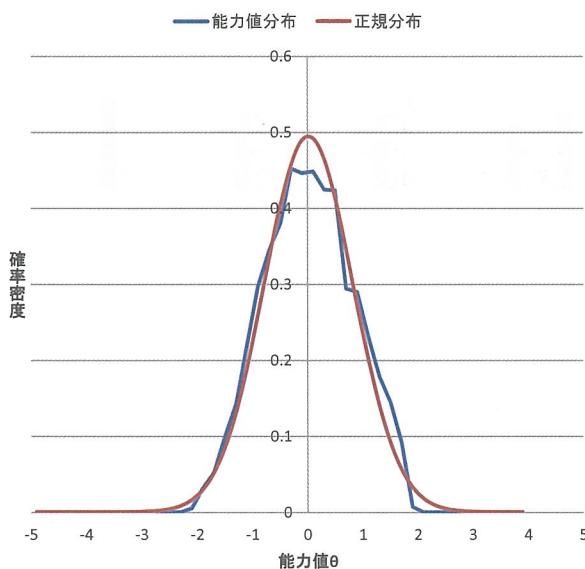
2011問題	2011年度 困難度
A9	1.60280
C8	1.53393
C11	1.26616
D11	1.16046
B11	1.04884
D8	0.83924
A10	0.74933
C10	0.60702
B10	0.58975
D10	0.53829
A11	0.40633
A6	0.24266
C7	0.07168
D7	-0.00723
B8	-0.01292
A7	-0.09209
A8	-0.09650
B7	-0.36104
D6	-0.39423
B6	-0.43795
A5	-0.43839
B9	-0.44791
C6	-0.46036
C5	-0.48309
C9	-0.53599
D3	-0.60013
B5	-0.62447
C4	-0.62452
C3	-0.67514
A4	-0.71564
A3	-0.74275
D4	-0.81833
C2	-0.90421
B2	-0.95537
B4	-1.08979
B3	-1.12824
A2	-1.17636
D2	-1.20997
C1	-1.28216
A1	-1.50717
D1	-1.61908
D5	-1.84127
B1	-2.09290
D9	-2.47211

2011年度 困難度

ベイズ推定による能力値の分布について

被験者数 26,253人

図1 Bayes
 $\mu=0.0213, \sigma=0.808$



参考:

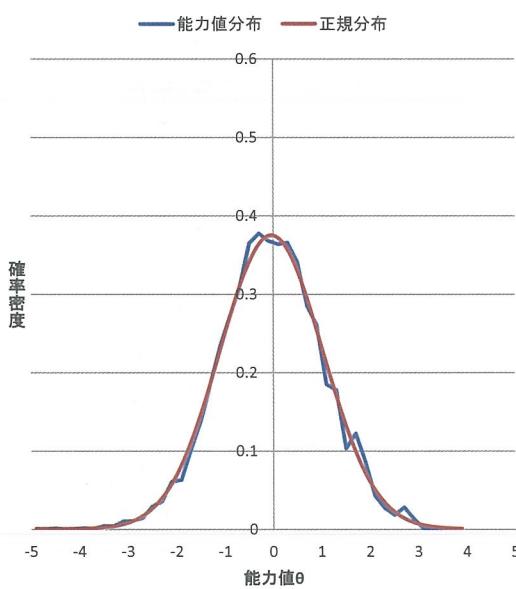
歪度s	-0.0055
尖度k	-0.6005
データ数n	26253
JB	14180

11

ベイズ推定でない能力値の分布について

0点及び満点を除く被験者数 24,752人

図2 Non-Bayes
 $\mu=-0.0340, \sigma=1.065$



参考:

歪度s	-0.0374
尖度k	0.1426
データ数n	24752
JB	8425

12