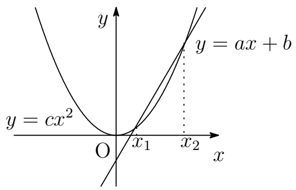
数 学 問 題 (A)

1. 関数 $y=3x^2-x^3$ のグラフをかくとき，この関数の極小値を示す点の座標は，つぎのどれですか。

(ア) (2, 4)　(イ) (3, 0)　(ウ) (1, 2)
(エ) (0, 3)　(オ) (0, 0)

2. 右のグラフにおいて，
つぎのどの場合に $ax+b>cx^2$ となりますか。答えは，
つぎの中から選びなさい。



(ア) $(x-x_1)(x-x_2)>0$　(イ) $(x-x_1)(x-x_2)<0$
(ウ) $0<x<x_1$　(エ) $x>x_2$
(オ) (ア)〜(エ) のどれでもない。

3. $3f'(x)=x^2-5$ で，$f(2)=1$ のとき，$f(0)$ の値はつぎのどれですか。

(ア) $-\dfrac{5}{3}$　(イ) $-\dfrac{2}{3}$　(ウ) $\dfrac{1}{3}$

(エ) $\dfrac{25}{9}$　(オ) $\dfrac{31}{9}$

4. 直線 l の方程式は $ax+by=0$，直線 m の方程式は $px+qy+r=0$ $(r\neq 0)$ です。
l と m が点P で交わるとき，方程式

$$(a+p)x+(b+q)y+r=0$$

の表す直線について，つぎのどれがあてはまりますか。ただし，O は原点とします。

(ア) l と m の両方に垂直である。　(イ) l , m と二等辺三角形を作る。
(ウ) OP に平行である。　(エ) O を通る。
(オ) P を通る。

5. 時刻 t $(t>0)$ において，座標平面上の動点 $(x\ ,\ y)$ が

$$\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=\log(1+2t) \end{cases}$$

と表されるとき，時刻 t での速度ベクトルは，つぎのどれになりますか。

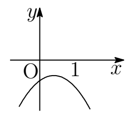
(ア) $(e^{-t}\ ,\ \log(1+2t)\ )$　(イ) $\left(e^{-t}\ ,\ \dfrac{1}{1+2t}\right)$　(ウ) $\left(-e^{-t}\ ,\ \dfrac{2}{1+2t}\right)$

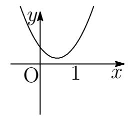
(エ) $\left(-e^{-t}\ ,\ \dfrac{1}{1+2t}\right)$　(オ) $\left(-1\ ,\ \dfrac{1}{t}\right)$

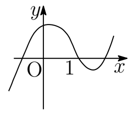
6. 関数 $y=3x^3+6x^2+kx+9$ のグラフの変曲点における接線の傾きが 0 となるとすれば，k の値はいくらですか。

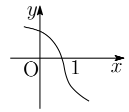
(ア) 0　(イ) 1　(ウ) 2　(エ) 3　(オ) 4

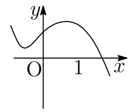
7. 関数 $f(x)$ について，「$f'(0)>0$, $f'(1)<0$ かつ $f''(x)$ は定義域のすべての x に対して負」という条件が与えられているとき，下のグラフの中で，この条件を満たすものはどれですか。

(ア)


(イ)


(ウ)


(エ)


(オ)


8. $z=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$ のとき，z^3 はつぎのどれですか。

(ア) 0　(イ) 1　(ウ) i　(エ) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}+\dfrac{i}{8}$　(オ) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}-\dfrac{i}{8}$

9. $\dfrac{3}{2}$, $\log_3 0.6$, $\log_3 4$, $\log_4 3$ の大小関係を調べ，小さい順に並べなさい。

10. △ABC の内部の点 P に対して，つぎの等式が成り立つとき，点 P はどのような位置にあるか図示し，説明しなさい。

$$3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4\overrightarrow{\mathrm{BP}}+5\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{0}$$

11. クラス 40 人の生徒が受験した試験において答案返却後採点ミスがあることがわかり，生徒 A，B，C，D の得点がそれぞれ 4，6，8，10 点ずつ加点されました。この 4 人の得点が加点される前のクラス 40 人の標準偏差を s_1，加点された後の標準偏差を s_2 として，$S=s_2-s_1$ とおきます。S の値について，次の (1)〜(4) の番号から確実に言えるものを 1 つだけ選び，その理由を答えなさい。

(1) 正である　(2) 負である　(3) 0 である　(4) (1)〜(3) のいずれでもない

【以上】

資料Ⅰ－1

数　学　問　題　（B）

1.　商品を $x \times 10^3$ 個 $(0 < x < 5)$ 売ったときの利益 $y \times 10^3$ 円を予想するために，つぎの 2 つの関係式 A, B を考えました。

$$\text{関係式 A} : y = 6x - x^2\ ,\ \text{関係式 B} : y = 2x$$

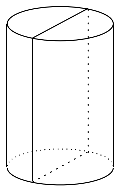
関係式 A より関係式 B の方が，多くの利益をあげるような x の範囲は，つぎのどれですか。

(ア) $0 < x < 4$　　(イ) $0 < x < 5$　　(ウ) $3 < x < 5$
(エ) $3 < x < 4$　　(オ) $4 < x < 5$

2.　ある母集団の平均は 5 で，標準偏差は 1 である。この母集団の各要素に 10 を加えたとき，平均と標準偏差はつぎのどれになりますか。

(ア)　平均 15，標準偏差 1　　(イ)　平均 15，標準偏差 5　　(ウ)　平均 15，標準偏差 11
(エ)　平均 10，標準偏差 1　　(オ)　平均 10，標準偏差 5

3.　円柱を右の図のように軸を通る平面で切ると，その切り口は長方形になります。この切り口の長方形の周囲が 6m であるような円柱の中で，最大の体積を持つものの底面の半径は，つぎのどれですか。



(ア) 2.5 m　　(イ) 2 m　　(ウ) 1.5 m　　(エ) 1 m　　(オ) 0.5 m

4.　$a_1 = 1\ ,\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ で定義される数列の一般項 a_n は，つぎのどれですか。

(ア) $a_n = 4$　　(イ) $a_n = 4n + 2$　　(ウ) $a_n = 2n - 1$
(エ) $a_n = 2n + 2$　　(オ) $a_n = n^2$

5.　関数 f のグラフ上で, $(a, 1)$ がグラフの変曲点になるとき, つぎのどれがつねに成り立ちますか。

(ア) $f(a) = 0$　　(イ) $f'(a) = 0$　　(ウ) $f''(a) = 0$
(エ) f は, $x = a$ で極大値か極小値をとる。
(オ) f' は, $x = a$ で極小値をとる。

6.　放射性元素は，つぎの式に従って崩壊します。

$$y = y_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

ただし, y は t 日後に残っている元素の量, y_0 は $t = 0$ のときの y の値を示します。
半減期（その元素の半分が崩壊するまでの時間）が 4 日である元素の定数 k の値は，つぎのどれですか。

(ア) $\dfrac{1}{4}\log_e 2$　　(イ) $\log_e \dfrac{1}{2}$　　(ウ) $\log_2 e$
(エ) $(\log_e 2)^{\frac{1}{4}}$　　(オ) $2e^4$

7.　$\displaystyle\int \sqrt{x-1}\, dx$ はつぎのどれですか。

(ア) $\dfrac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$　　(イ) $\left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)^{\frac{3}{2}} + C$　　(ウ) $\dfrac{1}{2}(x-1) + C$

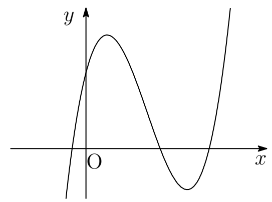
(エ) $(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$　　(オ) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} + C$

8.　$x = 2\cos t,\ y = \sin t$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t で表すと，つぎのどれになりますか。

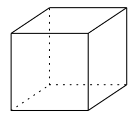
(ア) $\dfrac{1}{2}\tan t$　　(イ) $2\tan t$　　(ウ) $\dfrac{1}{2\tan t}$
(エ) $-\dfrac{1}{2\tan t}$　　(オ) $-\dfrac{2}{\tan t}$

9.　点 A$(2, 1)$ を原点を中心に，反時計回りに $60°$ 回転し，さらに 2 倍に拡大した点を B とします。点 B の座標を求めなさい。

10.　右は 3 次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフである。
係数 a，b，c，d の符号を決めなさい。



11.　正 12 面体は 12 枚の正 5 角形でできています。正 12 面体の見取り図をかきなさい。ただし，見取り図とは，例えば立方体では右のような図のことです。



【以上】

数　学　問　題　(C)

1.　2つの独立した警報装置を備えた警報システムがあります。非常の際に各装置が作動する確率は，それぞれ 0.95，0.90 です。非常の際に少なくとも1つの装置が作動する確率は，つぎのどれですか。

(ア) 0.995　　(イ) 0.975　　(ウ) 0.95
(エ) 0.90　　(オ) 0.855

2.　n が自然数で, $5^{2n}+5^n$ が 13 で割り切れるとき, n はどのような数ですか。
答えはつぎの中から選びなさい。

(ア) $n=2$ だけ　　(イ) n は負でない偶数
(ウ) $n=8p+2$　(p は負でない整数)　　(エ) $n=4p+2$　(p は負でない整数)
(オ) そのような n はない。

3.　$10^a=4$ のとき, 10^{1+2a} の値は，つぎのどれですか。

(ア) 26　　(イ) 40　　(ウ) 160　　(エ) 900　　(オ) 10^9

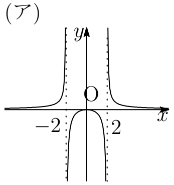
4.　平面上に3点 Q$(-3,-1)$, R$(-2,3)$, S$(1,-3)$ があるとき，$\overrightarrow{\mathrm{ST}}=2\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ となる 点 T の y 座標は，つぎのどれですか。

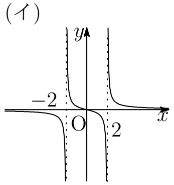
(ア) -11　　(イ) -7　　(ウ) -1　　(エ) 1　　(オ) 5

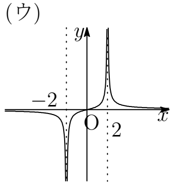
5.　$\dfrac{4}{\sqrt{3x-4}}$ の導関数は，つぎのどれですか。

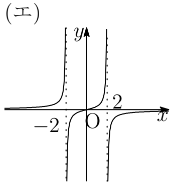
(ア) $12\sqrt{3x-4}$　　(イ) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$　　(ウ) $\dfrac{-2}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$
(エ) $\dfrac{-6}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$　　(オ) $6\sqrt{3x-4}$

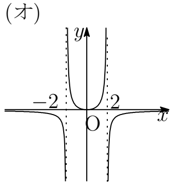
6.　$f(x)=\dfrac{x}{(x-2)(x+2)}$ のとき，関数 $f(x)$ のグラフは，つぎのどれですか。

(ア)


(イ)


(ウ)


(エ)


(オ)


7.　無限等比級数 $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\cdots$ の和は，つぎのどれですか。

(ア) $\dfrac{5}{8}$　　(イ) $\dfrac{2}{3}$　　(ウ) $\dfrac{3}{5}$　　(エ) $\dfrac{3}{2}$　　(オ) ∞

8.　座標平面上で，時刻 t における動点 M の座標 (x,y) は，

$$\begin{cases} x=2\sin t \\ y=2\cos 2t-1 \end{cases}$$

です。点 M の軌跡はつぎのどれですか。

(ア) 直線　　(イ) 半円　　(ウ) 半楕円　　(エ) 放物線　　(オ) うずまき線

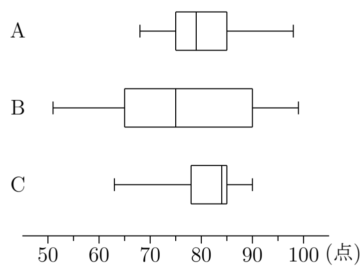
9.　座標平面上の2円 $(x-2)^2+(y-14)^2=125$, $x^2+y^2=25$ の共通な弦と原点との距離を求めなさい。

10.　△ABC は，AB=10，AC=15，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ である。∠BAC の2等分線と BC との交点を D とするとき，AD の長さを求めなさい。

11.　左下の表は，A さん，B さん，C さん3人の9科目のテスト結果を表したものです。このデータをもとに作成した図が右下の図です。この箱ひげ図とデータをもとに，最も成績の良い人を1人選ぶことになりました。あなたなら誰を選びますか。選んだ理由とともに答えなさい。なお，理由には統計の用語（最大値，四分位数，等）を必ず用いるものとします。

	A さん	B さん	C さん
国語	80	51	85
数学	90	68	88
英語	98	99	75
理科	77	75	90
社会	75	83	84
芸術	70	90	63
家庭	68	98	78
体育	85	55	84
情報	79	65	80

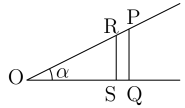
(単位は点)



【以上】

数　学　問　題　（D）

1.　右の図で，PQ $\perp$ OQ および RS $\perp$ OQ です。
OQ=OR$=1$，$\angle$ POQ $=\alpha$ とすると，PQ は，
つぎのどれですか。



（ア）　$\sin\alpha$　　（イ）　$\cos\alpha$　　（ウ）　$\tan\alpha$
（エ）　$2\sin\alpha$　　（オ）　$1-\cos\alpha$

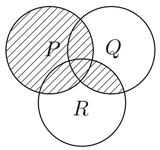
2.　x, y は正の実数で，$y=4x^3$ とします。
$\log y$ を x 座標, $\log x$ を y 座標とする点の集合は，つぎのどれになりますか。
（ア）1 点　　（イ）3 次曲線　　（ウ）放物線
（エ）直線　　（オ）指数関数の表す曲線

3.　θ は，90° と 180° の間の角で，$\cos^2\theta=\dfrac{16}{25}$ です。$\sin 2\theta$ の値は，つぎのどれですか。

（ア）　$-\dfrac{24}{25}$　　（イ）　$-\dfrac{15}{25}$　　（ウ）　$-\dfrac{7}{25}$

（エ）　$\dfrac{7}{25}$　　（オ）　$\dfrac{24}{25}$

4.　記号 $P\cap Q$ は，2 つの集合 P と Q の交わり (共通部分) を表し，記号 $P\cup Q$ は，2 つの集合 P と Q の結び (和集合) を表します。右の図の斜線部分は，つぎのどれですか。



（ア）$(P\cap Q)\cup R$　　（イ）$P\cup(Q\cap R)$　　（ウ）$P\cap(Q\cup R)$
（エ）$(P\cap Q)\cap R$　　（オ）$(P\cup Q)\cap R$

5.　$f(x)$ は偶関数で $x=0$ で微分可能であるとき, $f'(x)$ は，つぎのどの条件を満たしますか。

（ア）$f'(0)=1$　　（イ）$f'(0)>0$　　（ウ）$f'(0)<0$
（エ）$f'(0)=0$　　（オ）$f'(0)$ はどんな値でもとることができる。

6.　$\displaystyle\int_0^1 \frac{12x}{(2x^2+1)^2}\,dx$　の値はつぎのどれですか。

（ア）-2　　（イ）-1　　（ウ）2　　（エ）$\log 2$　　（オ）$3\log 3$

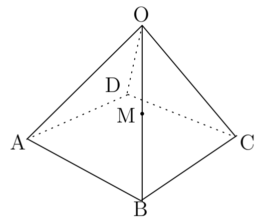
7.　複素数 z の絶対値は $\sqrt{2}$ で，偏角は $\dfrac{3\pi}{4}$ であるとき，z は，つぎのどれと等しいですか。

（ア）$\dfrac{i-1}{\sqrt{2}}$　　（イ）$i-1$　　（ウ）$\sqrt{2}(i-1)$　　（エ）$i+1$　　（オ）$\dfrac{i+1}{\sqrt{2}}$

8.　媒介変数表示による方程式 $x=t+\dfrac{1}{t}$, $y=t-\dfrac{1}{t}$ で表される曲線の x , y についての方程式は，つぎのどれですか。

（ア）$x+y=1$　　（イ）$x+y=2$　　（ウ）$x^2+y^2=4$
（エ）$x^2-y^2=4$　　（オ）$2x^2-y^2=4$

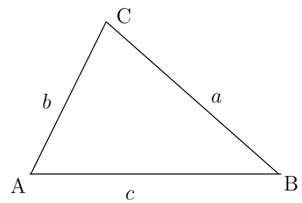
9.　すべての辺の長さが 1 である正四角すい O-ABCD において，辺 OB の中点を M とするとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ を求めなさい。



10.　△ABC において，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

が成り立つことを，証明しなさい。



11.　$f(x)$ を 2 次式とします。次の (i)〜(iv) すべての条件を満たす曲線 $y=f(x)$ の概形を描きなさい。ただし，x 軸，y 軸との交点の位置を考慮して，すべての場合の概形を描くこと。

(i)　$f(x)$ の 2 次の項の係数は負の値である。
(ii)　曲線 $y=f(x)$ は x 軸と交わっている。
(iii)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とのすべての交点の x 座標をかけ合わせると，0 以下の値である。
(iv)　$f'(0)<0$

【以上】

理数系高校生のための基礎学力調査／平成28年度

数　学　問　題　（A）　　解　答

1.

$$
\begin{aligned}
y' = 6x - 3x^2 \quad y' &= 0 \text{ より} \\
3x(2-x) &= 0 \\
\text{よって}, x &= 0, 2
\end{aligned}
$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$

増減表より，
極小値を示す点の座標は $(0, 0)$. ……（オ）

2.　放物線は下に凸なので，$c > 0$ である．また，x_1, x_2 は $cx^2 = ax + b$，すなわち $cx^2 - ax - b = 0$ の解なので，$cx^2 - ax - b = c(x - x_1)(x - x_2)$ である．よって，

$$ax + b > cx^2 \ \Leftrightarrow\ cx^2 - ax - b < 0 \ \Leftrightarrow\ c(x - x_1)(x - x_2) < 0$$

なので，$c > 0$ より　$(x - x_1)(x - x_2) < 0$　……（イ）

3.　$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}$ より，積分定数を C として $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{5}{3}x + C$ を得る．
ここで，$f(2) = 1$ より $C = \frac{31}{9}$ ．$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{5}{3}x + \frac{31}{9}$　ゆえに　$f(0) = \frac{31}{9}$　…（オ）

4.　l と m の交点 P の座標を (x_0, y_0) とすると，

$$
\begin{aligned}
ax_0 + by_0 = 0 &\quad \cdots ① \\
px_0 + qy_0 + r = 0 &\quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

である．与式の左辺に (x_0, y_0) を代入すると ①，②より

$$(a + p)x_0 + (b + q)y_0 + r = (ax_0 + by_0) + (px_0 + qy_0 + r) = 0$$

したがって，与式は点 P を通る．　……（オ）

5.

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \log(1 + 2t) \end{cases} \quad \text{について，} \quad \frac{dx}{dt} = -e^{-t} \ , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2}{1 + 2t} \quad \text{だから，}$$

動点 (x, y) の時刻 t での速度ベクトルは，$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(-e^{-t}, \frac{2}{1+2t}\right)$　……（ウ）

6.　$f(x) = 3x^3 + 6x^2 + kx + 9$ とすると，

$$f'(x) = 9x^2 + 12x + k, \qquad f''(x) = 18x + 12 \qquad \text{よって，変曲点の } x \text{ 座標は，} x = -\frac{2}{3} \text{ である．}$$

$$f'\left(-\frac{2}{3}\right) = 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 12 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + k = -4 + k \quad \text{であるから，} \quad -4 + k = 0 \quad \therefore\ k = 4 \ \cdots\cdots（オ）$$

7.「$f''(x)$ は定義域のすべての x に対して負」ということから，この関数のグラフは定義域すべてで上に凸である．これを満たすものは（ア）のみであり，$f'(0) > 0$ ，$f'(1) < 0$ も満たしている．　……（ア）

8.　de Moivre の定理より

$$
\begin{aligned}
z^3 &= \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3 \\
&= \cos\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}\pi + i\sin\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}\pi \\
&= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \\
&= 0 + i \cdot 1 = i \ \cdots\cdots（ウ）
\end{aligned}
$$

<u>別解</u>

$$
\begin{aligned}
z &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z^3 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3 \\
&= \frac{1}{2^3}(\sqrt{3} + i)^3 \\
&= \frac{1}{8}(3\sqrt{3} + 9i + 3\sqrt{3}i^2 + i^3) \\
&= \frac{1}{8} \cdot 8i = i \ \cdots\cdots（ウ）
\end{aligned}
$$

9.　$a > 1$ のとき，関数 $y = \log_a x$ のグラフは単調に増加するので，

$$0 < \log_4 3 < \log_4 4 = 1 = \log_3 3 < \log_3 4$$

$\frac{3}{2}$ と $\log_3 4$ を比較して，

$$\frac{3}{2} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \log_3 \sqrt{27} > \log_3 \sqrt{16} = \log_3 4$$

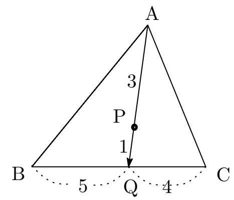
また，$\log_3 0.6 < \log_3 1 = 0$　　したがって，

$$\log_3 0.6 < \log_4 3 < \log_3 4 < \frac{3}{2} \quad \cdots\cdots（答）$$

10.　$3\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 4\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 5\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{0}$　より

$$
\begin{aligned}
3\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 4(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) + 5(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) &= \overrightarrow{0} \\
(3 + 4 + 5)\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= 4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 5\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 5\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{12} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 5\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5 + 4}
\end{aligned}
$$

となり，辺 BC を $5:4$ に内分する点を Q とすると，点 P は AQ を $3:1$ に内分する点であることが分かり，右の図のようになる．



11.　(1) の例：加点前に 40 人全員が 80 点のとき，$s_1 = 0$，$s_2 > 0$ なので，$S = s_2 - s_1 > 0$ である．
(2) の例：加点前に A が 76 点，B が 74 点，C が 72 点，D が 70 点で，それ以外の 36 人が 80 点のとき，加点後に 40 人全員が 80 点になるので，$s_1 > 0$，$s_2 = 0$ より，$S = s_2 - s_1 < 0$ である．
(3) の例：加点前に A が 78 点，B が 77 点，C が 76 点，D が 75 点で，それ以外の 36 人が 80 点のとき，加点後に A が 82 点，B が 83 点，C が 84 点，D が 85 点で，それ以外の 36 人が 80 点になるので，$s_1 = s_2$ より，$S = s_2 - s_1 = 0$ である．
　よって，(1)〜(3) のいずれも確実には言えないので，(4) が正しい．

理数系高校生のための基礎学力調査／平成28年度

数 学 問 題 （B） 解 答

1. 関係式Aより関係式Bの方が，多くの利益をあげるということは，

$$\begin{aligned}(6x-x^2)\times 10^3 &< 2x\times 10^3\\ 6x-x^2 &< 2x\\ x^2-4x &> 0\\ x(x-4) &> 0\\ x<0 \quad &, \quad x>4\end{aligned}$$

一方，題意より $0<x<5$ だから，求める範囲は，$4<x<5$ ……（オ）

2. 母集団の各要素を $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ とすると，仮定より，

$$(\text{平均})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=5, \qquad (\text{標準偏差})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-5)^2=1$$

である．このとき，各要素に10を加えると $x_1+10, x_2+10, x_3+10, \cdots, x_n+10$ なので，これらを母集団とした場合，平均と標準偏差は次の通りである．

$$(\text{平均})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i+10)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+10n\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+10=5+10=15,$$

$$(\text{標準偏差})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(x_i+10)-15\}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-5)^2=1 \ \cdots\cdots(\text{ア})$$

3. 円柱底面の半径を $r\ (>0)$ m とすると，題意より円柱の高さは $(3-2r)$ m で，$3-2r>0$ より，$0<r<\dfrac{3}{2}$
このとき，円柱の体積 $V(r)$ m^3 は

$$V(r)=\pi r^2\cdot(3-2r)=\pi(-2r^3+3r^2)$$

$$\frac{dV}{dr}=\pi(-6r^2+6r)=-6\pi r(r-1)$$

r	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$\frac{dV}{dr}$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	極大	↘	

だから，$0<r<\dfrac{3}{2}$ の範囲で増減表を考えると，$V(r)$ は，$r=1$ で極大かつ最大であることが分かる．

よって，底面の半径は 1 m ……（エ）

4. 与式を変形して，$a_{n+1}-a_n=2n+1$．これより，$\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $2n+1$ であるので，
$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=1+(n-1)n+(n-1)=n^2$$

となり，これは $n=1$ のときも成り立つ．
よって，すべての自然数 n で $a_n=n^2$ ……（オ）

5. 変曲点は，グラフの凹凸が切り替わる点であり，このとき，接線の傾き (f' の値) が増加から減少，または減少から増加へ変化する．したがって，$x=a$ を境に，f'' の値が正から負，または負から正へ変化するので，$f''(a)=0$ である． ……（ウ）

6. 4日後に半減するので，$\dfrac{y_0}{2}=y_0\cdot e^{-4k}$ $\quad\therefore\quad e^{-4k}=\dfrac{1}{2}$

両辺の対数をとり，$-4k=\log\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\quad k=-\dfrac{1}{4}\log\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}\log 2^{-1}=\dfrac{1}{4}\log 2$ ……（ア）

7. $\displaystyle\int\sqrt{x-1}\,dx=\int(x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-1)^{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$ ……（ア）

8. $\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=\cos t$ より，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t}{-2\sin t}=-\frac{1}{2\tan t} \quad\cdots\cdots(\text{エ})$$

9.

$$\begin{aligned}\alpha &= 2+i\\ z &= \cos 60^\circ+i\sin 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{とおくと}\\ \beta &= 2\alpha z=2(2+i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= (2+i)(1+\sqrt{3}i)\\ &= (2-\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i\end{aligned}$$

$\therefore$ B$(2-\sqrt{3}\ ,\ 1+2\sqrt{3})$ ……（答）

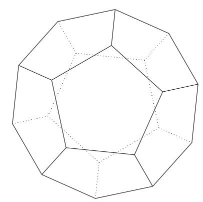
<u>別解</u>

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= 2\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= 2\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\\ 1+2\sqrt{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\therefore$ B$(2-\sqrt{3}\ ,\ 1+2\sqrt{3})$ ……（答）

10. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$ である．このグラフと y 軸との交点の y 座標は正なので，$f(0)=d>0$ である．また，この点における接線の傾きは正なので，$f'(0)=c>0$ である．変曲点の前後でこのグラフの接線の傾きは減少から増加に変わるので，$f''(x)$ の x の係数 $6a$ は正，すなわち，$a>0$ である．変曲点の x 座標は正なので，$f''(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{3a}$ より，$-\dfrac{b}{3a}>0$ であり，$a>0$ を用いれば，$b<0$ である．
以上より，$a>0$，$b<0$，$c>0$，$d>0$ ……（答）

11. 解答の例



理数系高校生のための基礎学力調査／平成28年度

数　学　問　題　（C）　　解　答

1.　「少なくとも1つの装置が作動する」事象は「2つとも作動しない」事象の余事象である．
2つとも作動しない確率は　$(1-0.95)\times(1-0.90)$　であるから，求める確率は

$$1-(1-0.95)\times(1-0.90)=0.995 \qquad \cdots\cdots（ア）$$

2.　$5^{2n}+5^n=5^n(5^n+1)$ であるから，与式が13で割り切れるとき，5^n+1 が13で割り切れる．
$5^n\div 13$ の余りを考えると，(13で割ったときの余りが等しいことを“$\equiv$”で表す)

$n=1$ のとき, $5^1=5$
$n=2$ のとき, $5^2=25$
$n=3$ のとき, $5^3\equiv 12\cdot 5=60\equiv 8$
$n=4$ のとき, $5^4\equiv 8\cdot 5=40\equiv 1$
$n=5$ のとき, $5^5\equiv 1\cdot 5=5$
$\cdots$であるから,

与式が13で割り切れる $\Leftrightarrow$ 5^n+1 が13で割り切れる．以下，繰り返し (数学的帰納法で証明できる)
したがって，$n=2,6,10,\cdots$ すなわち,
$n=4p+2$(p は負でない整数) のとき，与式は13で割り切れる．$\cdots\cdots$（エ）

3.　$10^{1+2a}=10\cdot 10^{2a}=10\cdot(10^a)^2=10\cdot 4^2=160 \qquad \cdots\cdots$（ウ）

4.　$\overrightarrow{\mathrm{ST}}=2\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ より,$\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{QR}}$　だから　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}+2\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(1,-3)+2\cdot(1,4)=(3,5)$

したがって, T の y 座標は　5　$\cdots\cdots$（オ）

5.　$\left(\dfrac{4}{\sqrt{3x-4}}\right)'=\left\{4(3x-4)^{-\frac{1}{2}}\right\}'=4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot(3x-4)^{-\frac{3}{2}}\cdot 3=\dfrac{-6}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$ $\cdots\cdots$（エ）

6.　$f(x)=\dfrac{x}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x}{x^2-4}$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-4)-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=-\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}<0$$

で減少関数であることが分かる．よって，選択肢のグラフの形で増加する箇所のあるものは該当しない．
$x\neq\pm2$ である任意の実数 x で減少しているのは（イ）のみ．$\cdots\cdots$（イ）

7.　初項が1，公比 r が $r=-\dfrac{1}{2}$，$|r|<1$ であるから，この無限等比級数は収束する．

したがって極限値は　$\dfrac{1}{1-r}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$ $\cdots\cdots$（イ）　である．

8.

$$\begin{cases} x=2\sin t \\ y=2\cos 2t-1 \end{cases} \quad より,$$

$$\begin{aligned} y&=2(1-2\sin^2 t)-1 \\ &=2-4\sin^2 t-1 \\ &=-x^2+1 \end{aligned}$$

よって，放物線 $\cdots\cdots$（エ）

9.　共通な弦を含む直線の方程式は,

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-14)^2=125 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \quad より, \quad x+7y-25=0.$$

よって，この直線と原点との距離は $\dfrac{|0+7\cdot 0-25|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ $\cdots\cdots$（答）

10.　面積に注目すると,
$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}$ だから，$\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 15\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin 30^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot 15\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin 30^\circ$
よって，$\dfrac{75\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot(10+15)\cdot\mathrm{AD}\cdot\dfrac{1}{2}$　ゆえに，$\mathrm{AD}=6\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$　（答）

11.
(最大値・最小値をもとに判断した例)
【A さん】最大値は2番目に高くCさんよりも高い．最小値は3人の中で最も高い．

(中央値と四分位範囲で全体的に高い点で安定していることを判断基準にした例)
【C さん】中央値が80点以上と最も高く，半数以上の科目で80点以上とっていることが分かる．また，四分位範囲が最も狭く安定して高得点をとっていることが分かる．

理数系高校生のための基礎学力調査／平成28年度

数 学 問 題 （D） 解 答

1. $\mathrm{OQ}=1$, $\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OQ}}=\tan\alpha$ より, $\mathrm{PQ}=\mathrm{OQ}\tan\alpha=\tan\alpha$ ……（ウ）

2. 点を P(X, Y) とする．

$$\begin{cases} \mathrm{X}=\log y=\log 4x^3=2\log 2+3\log x \\ \mathrm{Y}=\log x \end{cases} \qquad (但し, -\infty<\log x<\infty)$$

$\therefore$ $\mathrm{X}=2\log 2+3\mathrm{Y}$ となり，直線 ……（エ）

3. $90^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\cos\theta<0$，$\sin\theta>0$.

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}\,,\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\quad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25} \qquad \cdots\cdots（ア）$$

4. 図の斜線部分は，P と $Q\cap R$ の和集合なので，$P\cup(Q\cap R)$ ……（イ）

5. $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるから

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ \cdots\ (*)$$

となり，これらの値は同じ値に収束する．いま, $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\alpha$ と置く．
$(*)$ 式の右辺は $-h=k$ とすると, $f(x)$ が偶関数だから

$$(*)\ の右辺=\lim_{k\to+0}\frac{f(-k)-f(0)}{-k}=-\lim_{k\to+0}\frac{f(k)-f(0)}{k}=-\alpha$$

となり，$(*)$ 式は $\alpha=-\alpha$ ． よって, $\alpha=0$ すなわち, $f'(0)=0$ ……（エ）

6. $2x^2+1=t$ とおくと, $4xdx=dt$

x	$0\to1$
t	$1\to3$

より，

$$\int_0^1\frac{12x}{(2x^2+1)^2}dx=3\cdot\int_0^1\frac{4x}{(2x^2+1)^2}dx=3\cdot\int_1^3\frac{dt}{t^2}=-3\left[\frac{1}{t}\right]_1^3=2 \qquad \cdots\cdots（ウ）$$

7. $z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=i-1$ ……（イ）

8.
$$x^2=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2 \qquad \cdots\cdots (1)$$
$$y^2=\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2 \qquad \cdots\cdots (2)$$

(1) より $t^2+\dfrac{1}{t^2}=x^2-2$ として，これを (2) に代入すると

$$y^2=x^2-2-2 \qquad \therefore\quad x^2-y^2=4 \qquad \cdots\cdots（エ）$$

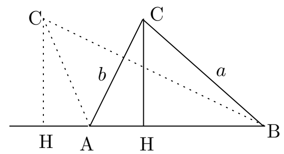
9. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする. $\overrightarrow{\mathrm{MA}}=\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=1$, $\mathrm{AC}=\sqrt{2}$ なので, △OAC は,∠O が直角である直角二等辺三角形. ∴ $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$
△OAB , △OBC は1辺が1の正三角形なので,
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1\times1\times\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$, $\vec{b}\cdot\vec{b}=1$

$$以上から，\quad \overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}=0-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots（答）$$

10. C から直線 AB に引いた垂線を CH とすると，



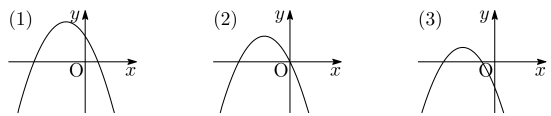
$$\mathrm{CH}=b\sin A\ ,\ \mathrm{BH}=c-b\cos A$$

これは，$0<\angle\mathrm{A}<180^\circ$ で成り立つ．△CHB で，三平方の定理より

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{BH}^2 \quad だから \quad a^2=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2$$

これを展開して，$\sin^2A+\cos^2A=1$ を用いると, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ である． (証明終)

11. (i)，(ii)，(iv) より，曲線 $y=f(x)$ は上に凸な放物線で，頂点の y 座標は正であり，また，点 $(0, f(0))$ における接線の傾きは負であるから，次の (1)〜(3) の概形が考えられる．



さらに (iii) の条件を加えると，(3) は不適なので，(1)，(2) が求める概形である．