

確定特異点型接続に対する Riemann-Hilbert 対応

山川 大亮*

京都大学 数理解析研究所

目次

第 I 部	Riemann 面上の有理型接続の局所理論	2
1	線型常微分方程式系	3
1.1	Fuchs の定理	3
1.2	多価関数解及びモノドロミーの一般的表示	5
1.3	確定特異点型線型常微分方程式系のモノドロミー	6
1.4	確定特異点型線型常微分方程式系のモノドロミーの計算	9
2	有理型接続による再定式化	11
2.1	有理型接続と常微分方程式系	11
2.2	有理型接続の構成	11
2.3	巡回元の構成	11
2.4	確定特異点型接続	13
第 II 部	確定特異点型接続	17
3	序	17
4	有理型接続	19
5	確定特異点型接続	19
6	正規交叉因子	20
7	Riemann-Hilbert 対応	23
8	比較定理	25
9	代数的な場合	28
9.1	確定特異点型接続の定義	28
9.2	主定理	29

* yamakawa@kurims.kyoto-u.ac.jp

第 I 部

Riemann 面上の有理型接続の局所理論

本章では Fuchs による確定特異点型線型常微分方程式系の古典的な理論を紹介する。

まず、常微分方程式論における基本的な用語について注意しておく。1 変数関数 $u(z)$ を未知関数とする微分方程式

$$\frac{d^n u}{dz^n} + a_1(z) \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \cdots + a_n(z) u = 0$$

を n 階 (単独) 線型常微分方程式と呼ぶ。正確には、上式で右辺が 0 であるという意味を込めて「同次」という単語も付ける必要があるが、本章では主に同次方程式を扱うため、そうでない場合に限って「非同次」という単語を付けて区別する事にする。

$A(z) = (a_{ij}(z))$ を n 次正方行列に値を取る関数とした時、 n 次元ベクトル値関数 $V(z)$ に対する微分方程式

$$\frac{dV}{dz} = A(z)V$$

を n 連立 1 階線型常微分方程式、または単に線型常微分方程式系と呼ぶ。本章では主にこの線型常微分方程式系を扱うため、これを更に省略して単に「系」と呼ぶ事もある。同次・非同次という単語に対する断りも先の単独方程式の場合と同様にしておく。

本章では微分方程式を複素平面内の原点の近傍上で取り扱う。係数 $a_i(z)$ や $a_{ij}(z)$ は $D_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \epsilon\}$ 上の有理型関数であり、穴あき円盤 $D_\epsilon^\circ = D_\epsilon \setminus \{0\}$ 上正則である事を仮定する。実際には

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(D_\epsilon), \\ K &= \mathcal{O}[z^{-1}] \end{aligned}$$

とおき、単に $a_i(z)$, $a_{ij}(z) \in K$ と書く事が多い。こういった場合、微分方程式の解としては 1 価関数だけでなく多価関数も考える方が自然である。例えば、微分方程式

$$u' = \frac{\lambda}{z} u$$

の解は $u(z) = ce^{\lambda \log z}$ (c は定数) で与えられるが、関数 $\log z$ は多価関数である。そこで D_ϵ° の普遍被覆空間

$$\tilde{D}_\epsilon^\circ = \{t \in \mathbb{C} \mid |e^{2\pi\sqrt{-1}t}| < \epsilon\}$$

を用意し、方程式を被覆写像 $\tilde{D}_\epsilon^\circ \ni t \mapsto z = e^{2\pi\sqrt{-1}t} \in D_\epsilon^\circ$ によって引き戻して考えれば、多価関数 $\log z = 2\pi\sqrt{-1}t$ は $\tilde{D}_\epsilon^\circ$ 上の 1 価関数として考える事ができ、先ほどの多価関数解は $\tilde{D}_\epsilon^\circ$ における方程式の 1 価関数解と解釈できる。

こういった事情から、本章では多価関数が頻繁に登場する。そこで D_ϵ° 上の多価関数も $f(z)$ と z の関数のようにして書く事がある。すなわち

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}}(D_\epsilon^\circ) &= \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\tilde{D}_\epsilon^\circ), \\ \tilde{\mathcal{O}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{O}}(D_\epsilon^\circ) \end{aligned}$$

とおき、被覆写像によって $\mathcal{O}(D_\epsilon) \subset \tilde{\mathcal{O}}(D_\epsilon)$, $\mathcal{O} \subset K \subset \tilde{\mathcal{O}}$ とみなす。また、微分方程式の多価関数解の事も単に「解」と呼ぶ事にする。

上で用意した記号は本章を通して用いられる．他に断りなく用いる記号を以下に挙げる：

$$\mathcal{D} = \left\{ P = \sum_{i=0}^n a_i(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-i} \mid a_i(z) \in \mathcal{O} \right\},$$

$$\mathcal{D}[z^{-1}] = \left\{ P = \sum_{i=0}^n a_i(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-i} \mid a_i(z) \in K \right\}.$$

1. 線型常微分方程式系

1.1. Fuchs の定理

定義 1.1. $f \in \tilde{\mathcal{O}}$ が**穏やかな増大度**を持つとは、任意の $\theta_1 > \theta_0 > 0$ に対し十分小さな $\epsilon > 0$ と自然数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及び $C > 0$ を取れば、 $\tilde{D}_\epsilon^\circ$ の部分集合

$$\tilde{S} = \{ t \in \tilde{D}_\epsilon^\circ \mid \theta_0 \leq 2\pi \operatorname{Re} t \leq \theta_1 \}$$

上常に

$$|f(t)| < C |e^{-2\pi\sqrt{-1}kt}| = C |z|^{-k}$$

が成立する事をいう．

穏やかな増大度を持つ関数芽のなす $\tilde{\mathcal{O}}$ の部分環を $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{mod}}$ で表す．

例えば、 D_ϵ° 上の関数 f が穏やかな増大度を持つためには、 $0 \in D_\epsilon^\circ$ が f の真性特異点でない、すなわち、 f が D_ϵ 上の有理型関数の制限となっている事が必要十分である．関数 z^α ($\alpha \in \mathbb{C}$) や $(\log z)^m$ は穏やかな増大度を持つ．

Cauchy の不等式により、 $\mathcal{D}[z^{-1}]$ は $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{mod}}$ に自然に作用する事に注意する．

Fuchs は次を証明した．

定理 1.2 (Fuchs の定理). $P = \sum_{k=0}^n a_k(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-k} \in \mathcal{D}[z^{-1}]$ とし、 $a_0 \neq 0$ と仮定する．このとき、微分方程式

$$Pu = 0 \tag{1.1}$$

の任意の (多価関数) 解 $u \in \tilde{\mathcal{O}}$ が穏やかな増大度を持つ事と、任意の i に対し a_i/a_0 の 0 における極としての位数が i 以下である事は同値である．

定理の条件を満足する微分方程式 $Pu = 0$ は原点 0 において**確定特異点型**であるといい、0 を**確定特異点**と呼ぶ．

$n = 1$ の場合の証明は容易である．この場合微分方程式 $Pu = 0$ は単に

$$\frac{du}{dz} = a(z)u, \quad a(z) \in K$$

の形をしている． $\epsilon > 0$ を十分小さく取って、 $a(z)$ は D_ϵ° 上正則であるとしておく．すると固定された $z_0 \in D_\epsilon^\circ$ における初期値 $u(z_0)$ のもとで解は

$$u(z) = u(z_0) \exp \left(\int_{z_0}^z a(w) dw \right)$$

と求まる．これが穏やかな増大度を持つためには $a(z)$ の極の位数が高々 1 でなければならない事は明らかである．

一般の n に対する定理の証明は後で行う (定理 1.6 及び §1.3 の最後を参照)．

さて微分方程式 (1.1) は n 個の未知関数 $u_1, u_2, \dots, u_n$ に対する次のような線型常微分方程式系と同値である：

$$\begin{aligned}\frac{du_i}{dz} &= u_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \frac{du_n}{dz} &= -\sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k+1}}{a_0} u_k.\end{aligned}\tag{1.2}$$

更にこれは

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & \cdots & \cdots & -\frac{a_1}{a_0} & 0 \end{pmatrix} \in \text{End}(n, K)$$

とおく事により, n 連立 1 階常微分方程式

$$\frac{dU}{dz} = AU\tag{1.3}$$

に書き換えられる.

後に (系 2.2 参照), 任意の線型常微分方程式系 (1.3) (ただし $A \in \text{End}(n, K)$) が (1.2) の形の線型常微分方程式系と同値になってしまう事を示す.

(1.1) を (1.3) の形に変換するもう 1 つの有用な方法を紹介しておく. 作用素 $\partial = z \frac{d}{dz}$ を用いて (1.1) を書き直すと,

$$\partial^n u + \sum_{i=1}^n b_i(z) \partial^{n-i} u = 0, \quad b_i(z) \in K$$

という形になる. そこで $v_i = \partial^{i-1} u$ とおき, 更に $B \in \text{End}(n, K)$ を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -b_n & \cdots & \cdots & -b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定めれば, 上式は

$$\frac{dV}{dz} = \frac{B(z)}{z} V$$

と書き換えられる. この方法の利点は, $b_i(z)$ と $a_i(z)$ の関係にある. 帰納法で容易に示される等式

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^k = z^{-k} \prod_{i=0}^{k-1} (\partial - i) \quad (k > 0)$$

を用いると, (1.1) は

$$a_n u + \sum_{k=1}^n z^{-k} a_{n-k} \prod_{i=0}^{k-1} (\partial - i) u = 0$$

と表され, この両辺に $z^n a_0^{-1}$ を掛ければ,

$$z^n \frac{a_n}{a_0} u + \sum_{k=1}^n z^{n-k} \frac{a_{n-k}}{a_0} \prod_{i=0}^{k-1} (\partial - i) u = 0$$

が得られる. この式の左辺の $\partial^{n-i} u$ の係数を b_i と置いていたのだから, 各 b_i は $z^k a_k / a_0$ 達の $\mathbb{C}$ 上の線型結合である. 故に, (1.1) が Fuchs の定理の条件を満たす事と, 各 b_i が原点で正則である事が同値になる.

1.2. 多価関数解及びモノドロミーの一般的表示

$\epsilon > 0$ を十分小さく取り, 系 (1.3) の係数行列 $A(z)$ の各成分 $a_{ij}(z)$ が D_ϵ° 上で正則であるとしておく. 普遍被覆 $\tilde{D}_\epsilon^\circ$ は単連結であるから, $\tilde{D}_\epsilon^\circ$ 上に (1.3) を持ち上げて (すなわち $z = \exp(2\pi\sqrt{-1}t)$ と変数変換して) 得られる系の解は $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間をなす. $\tilde{U}^1(t), \dots, \tilde{U}^n(t)$ を n 個の線型独立な解, すなわち解の基本系とし, これらを並べて行列 $\tilde{S}(t) = (\tilde{U}^1(t), \dots, \tilde{U}^n(t))$ を作る (これを基本解行列と呼ぶ). 各 $\tilde{U}^k(t)$ は $\tilde{O}(D_\epsilon^\circ)$ の元を成分とするベクトルである.

もともと微分方程式は D_ϵ° 上で定義されていたため, $\tilde{D}_\epsilon^\circ$ 上に持ち上げられた微分方程式の各係数は周期 1 である. 従って t を $t+1$ で置き換える事により別の基本系が得られ, 故にある行列 $C \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ が存在し

$$\tilde{S}(t+1) = \tilde{S}(t)C$$

となる. この C を系 (1.1) の**モノドロミー行列**と呼び, 対応する解空間上の線型変換を**モノドロミー**と呼ぶ.

Γ を $\exp(2\pi\sqrt{-1}\Gamma) = C$ を満たす行列とする. このような行列は必ず存在し, また固有値の実部が $[-1, 0)$ に属するという条件を付ければ一意である事に注意する. Γ の取り方から

$$\begin{aligned}\tilde{S}(t+1) \exp(-2\pi\sqrt{-1}\Gamma(t+1)) &= \tilde{S}(t)CC^{-1} \exp(-2\pi\sqrt{-1}\Gamma t) \\ &= \tilde{S}(t) \exp(-2\pi\sqrt{-1}\Gamma t),\end{aligned}$$

すなわち関数 $\tilde{S}(t) \exp(-2\pi\sqrt{-1}\Gamma t)$ は周期 1 である. 従ってこれは D_ϵ° 上の正則関数からなる行列 $\Sigma(z)$ を定める. 多価関数とみなして $\tilde{S}(t) = S(z)$, $2\pi\sqrt{-1}t = \log z$ と書けば, $S(z) = \Sigma(z) \exp(\Gamma \log z)$ となる. 以上で次が示された.

命題 1.3. 線型常微分方程式系 $dU/dz = A(z)U$ の解の基本系は, 常に

$$S(z) = \Sigma(z) \exp(\Gamma \log z) \quad (\text{正確には } \tilde{S}(t) = \Sigma(z) \exp(2\pi\sqrt{-1}\Gamma t))$$

の形となる. ここで $\Sigma(z)$ は D_ϵ° 上の正則関数からなる行列であり, Γ は $\exp(2\pi\sqrt{-1}\Gamma) = C$ を満たす定数行列である.

解の基本系を取り替えれば, モノドロミー行列 C や行列 Γ は基底変換行列によって共役なものに変わる. 従って Γ はジョルダン標準形になっていると仮定して良い. すなわち n の分割 $n = \sum_{i=1}^k n_i$ と複素数 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ が存在し,

$$\Gamma = \bigoplus_{i=1}^k \Gamma_{\alpha_i}, \quad \Gamma_{\alpha_i} = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & & 0 \\ 0 & \alpha_i & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_i \end{pmatrix} \in \text{End}(n_i, \mathbb{C})$$

となっているとして良い. このとき $e^{\Gamma \log z}$ は $e^{\Gamma_{\alpha_i} \log z}$ 達からなるブロック対角行列であり, また $e^{\Gamma_{\alpha_i} \log z}$ は

$$e^{\Gamma_{\alpha_i} \log z} = \begin{pmatrix} z^{\alpha_i} & z^{\alpha_i} \log z & \frac{1}{2} z^{\alpha_i} (\log z)^2 & \cdots \\ 0 & z^{\alpha_i} & z^{\alpha_i} \log z & \cdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & z^{\alpha_i} \end{pmatrix}$$

という形をしている.

従ってこの場合の基本系の各要素 $\tilde{U}^j(t)$ は

$$\sum_{r=1}^s z^{\alpha_i} (\log z)^{r-1} h_r(z)$$

と表される事が分かる。ただし $1 \leq s \leq n_i$ であり, $h_r(z)$ は $z = 0$ の外側で正則な関数からなるベクトルである。

系 1.4. 任意の n 階単独線型常微分方程式 $Pu = 0$ は, 必ず $z^\alpha h(z)$ の形の解を持つ。ここで $h(z)$ は $z = 0$ の外側で正則な関数であり, α は $e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}$ がモノドロミーの固有値であるような複素数である。

1.3. 確定特異点型線型常微分方程式系のモノドロミー

定義 1.5. 2つの系

$$\frac{d}{dz}U = AU, \quad \frac{d}{dz}V = BV$$

が**同値**であるとは, 有理型関数を成分として持つ行列 $M(z) \in \text{GL}(n, K)$ が存在して

$$B = \left(\frac{d}{dz}M \right) M^{-1} + MAM^{-1}$$

となる事をいう。

上の条件は, U が 1 番目の方程式の解であるとき, $V = MU$ が 2 番目の方程式の解になる事を表している。従って $S(z)$ が 1 番目の方程式の基本解行列ならば $M(z)S(z)$ は 2 番目の方程式の基本解行列となり, それぞれに付随するモノドロミー行列は一致する。

定理 1.6. 系

$$\frac{d}{dz}U(z) = A(z)U(z), \quad A(z) \in \text{End}(n, K) \quad (1.4)$$

に対し, 次の 3 条件は同値である:

(i) 正則関数を成分とする行列 $B(z)$ が存在し, (1.4) は系

$$\frac{d}{dz}V(z) = \frac{B(z)}{z}V(z)$$

に同値である。

(ii) (定数) 行列 Γ が存在し, (1.4) は系

$$\frac{d}{dz}V(z) = \frac{\Gamma}{z}V(z)$$

に同値である。

(iii) (1.4) の任意の解は穏やかな増大度を持つ。

上記の条件を満足する系は**確定特異点型**であるという。

証明. まず 3 番目の条件から 2 番目の条件を導く。命題 1.3 より, 解の基本系は $S(z) = \Sigma(z)e^{\Gamma \log z}$ の形をしている。 $S(z)$ が穏やかな増大度を持つという仮定と, $e^{-\Gamma \log z}$ が穏やかな増大度を持つという事実から, $\Sigma(z) = S(z)e^{-\Gamma \log z}$ も穏やかな増大度を持つ事が分かる。ところが $\Sigma(z)$ は 1 価関数であるから, これは $\Sigma(z)$ が有理型関数である事を意味する。そこで $V = \Sigma(z)^{-1}U$ と変換すれば, (1.4) と同値な系として

$$\frac{d}{dz}V = \frac{\Gamma}{z}V$$

を得る。

2 番目から 1 番目は明らかなので, 次に 1 番目から 3 番目を導く。 V を $\frac{d}{dz}V = \frac{B(z)}{z}V$ の解とし, S を扇形集合

$$S = \{z = re^{\sqrt{-1}\theta} \mid \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1, 0 < r < \epsilon\}$$

とする (正確には $\tilde{D}_\epsilon^\circ$ の部分集合として定める). $C = \sup_{z \in S} \|B(z)\|$ とおけば, S 上で

$$\left\| \frac{dV}{dz}(z) \right\| \leq \frac{C}{r} \|V(z)\|$$

が成立する. $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dV}{dz} e^{\sqrt{-1}\theta}$ を用いて上式を

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial r}(re^{\sqrt{-1}\theta}) \right\| \leq \frac{C}{r} \|V(re^{\sqrt{-1}\theta})\|$$

と書き換えれば, これから (微分積分学の基本定理と合わせて)

$$\|V(re^{\sqrt{-1}\theta})\| \leq \|V(\epsilon e^{\sqrt{-1}\theta})\| + \int_r^\epsilon \frac{C}{s} \|V(se^{\sqrt{-1}\theta})\| ds$$

が導かれる. 従って後で述べる補題 1.7 より

$$\|V(re^{\sqrt{-1}\theta})\| \leq \|V(\epsilon e^{\sqrt{-1}\theta})\| \left(\frac{\epsilon}{r}\right)^C$$

が成り立ち, θ について上限を取る事で

$$\|V(re^{\sqrt{-1}\theta})\| \leq \sup_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1} \|V(\epsilon e^{\sqrt{-1}\theta})\| \left(\frac{\epsilon}{r}\right)^C$$

を得る. V が穏やかな増大度を持つ事が示された. □

以下に述べる補題は Grönwall の不等式として常微分方程式論でよく知られている.

補題 1.7 (Grönwall の不等式). $u(t), v(t)$ を区間 $I = (a, b] \subset \mathbb{R}$ 上の実数値連続関数とする. u, v がどちらも I 上非負で, かつ適当な定数 $C \geq 0$ について不等式

$$v(t) \leq C + \int_t^b u(s)v(s) ds$$

を満たすと仮定すると, I 上

$$v(t) \leq C \exp \left(\int_t^b u(s) ds \right)$$

が成り立つ.

証明. まず $C > 0$ の場合に主張を示す. 仮定の不等式の右辺を $V(t)$ とおくと,

$$v(t) \leq V(t), \quad V(t) \geq C > 0, \quad V'(t) = -u(t)v(t)$$

が成り立つ. よって

$$V'(t) = -u(t)v(t) \geq -u(t)V(t)$$

となり, また $V > 0$ よりこれから

$$\frac{V'(t)}{V(t)} \geq -u(t)$$

が従う. 両辺を t から b まで積分する事で

$$\log V(b) - \log V(t) \geq - \int_t^b u(s) ds,$$

すなわち

$$V(t) \leq V(b) \exp \left(\int_t^b u(s) ds \right) = C \exp \left(\int_t^b u(s) ds \right)$$

を得る. $v(t) \leq V(t)$ より $C > 0$ の場合の主張が示された.

$C = 0$ の場合は, 任意の $C > 0$ に対し仮定の不等式が成り立つので, 今示した事から主張の不等式が任意の $C > 0$ で成立する事になる. $C \rightarrow 0$ とすれば求める結果 $v \equiv 0$ を得る. $\square$

系 1.8. 2つの確定特異点型線型常微分方程式系が同値であるためには, それらのモノドロミーが共役の関係にある事が必要十分である.

証明. 確定特異点型である事から2つの系はそれぞれ

$$\frac{d}{dz}U = \frac{\Gamma}{z}U, \quad \frac{d}{dz}U = \frac{\Gamma'}{z}U$$

の形の系と同値である. ここで Γ, Γ' は定数行列で, またその固有値は全て区間 $[-1, 0)$ に属していると仮定して良い. このとき2つの系のモノドロミー行列はそれぞれ $e^{2\pi\sqrt{-1}\Gamma}, e^{2\pi\sqrt{-1}\Gamma'}$ となるが, これらが共役となるのは Γ と Γ' が共役となる時に限る. $\square$

■Fuchs の定理の証明 微分方程式 $Pu = 0$ の係数が Fuchs の条件を満たすと仮定する, すなわち a_i/a_0 の $z = 0$ における極としての位数が i 以下であるとする. このとき §1.1 で紹介した $Pu = 0$ に付随する系 $\frac{d}{dz}V = BV$ は定理 1.6 の1番目の条件を満たす. 従って定理 1.6 により u は穏やかな増大度を持つ.

逆に, $Pu = 0$ の全ての解 u が穏やかな増大度を持つと仮定する. §1.1 で行ったように $Pu = 0$ を

$$Qu = \sum_{i=0}^n b_i(z) \partial^{n-i} u = 0, \quad b_0(z) \equiv 1$$

と変形し, n に関する帰納法によって各 $b_i(z)$ が正則である事を示そう.

系 1.4 より, $u(z) = z^\alpha h(z)$ の形の解が存在する. 仮定より u は穏やかな増大度を持つから $h(z)$ も穏やかな増大度を持ち, 従って $h(z)$ は有理型である. 故に α に適当な整数を加える事により, $h(z)$ は正則関数でかつ $h(0) \neq 0$ であるとして良い.

さて, Leibniz 則により任意の $v \in \tilde{\mathcal{O}}$ に対し

$$\begin{aligned} Q(uv) &= \sum_{i=0}^n b_i(z) \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (\partial^{n-i-k} u) (\partial^k v) \\ &= (Qu)v + \sum_{i=0}^n b_i(z) \sum_{k=1}^{n-i} \binom{n-i}{k} (\partial^{n-i-k} u) (\partial^k v) \end{aligned}$$

となる. 第1項は u の取り方から0であり, 故に

$$R = u^{-1} \sum_{i=0}^n b_i(z) \sum_{k=1}^{n-i} \binom{n-i}{k} (\partial^{n-i-k} u) \partial^{k-1}$$

によって $n-1$ 階の微分作用素 R を定めれば, $Q(uv) = 0$ と $R(\partial v) = 0$ は同値になる.

w を $Rw = 0$ の任意の解とすると, 適当な $v \in \tilde{\mathcal{O}}$ によって $w = \partial v$ と表せば (このような事は常に可能である), 今の議論から $Q(uv) = 0$ となる. 従って仮定より uv は穏やかな増大度を持ち, 故に v , 従って $w = \partial v$ も穏やかな増大度を持つ. よって帰納法の仮定から R の各係数は正則関数である. R の ∂^{k-1} の係数は

$$b_{n-k}(z) + \sum_{i < n-k} \binom{n-i}{k} (u^{-1} \partial^{n-i-k} u) b_i(z)$$

であり, $u^{-1} \partial^{n-i-k} u$ は仮定 $u = z^\alpha h$, $h(0) \neq 0$ から $z = 0$ の近傍で正則である. 故に各 b_i も正則である.

1.4. 確定特異点型線型常微分方程式系のモノドロミーの計算

命題 1.9.

$$\frac{d}{dz}U(z) = \frac{B(z)}{z}U(z)$$

を確定特異点型線型常微分方程式系とする ($B(z)$ の各成分は正則関数とする). もし $B(0)$ の相異なる固有値の差が常に整数でないならば, この系のモノドロミー行列は $\exp(2\pi\sqrt{-1}B(0))$ と共役である. 言い換えれば, 系は

$$\frac{d}{dz}U(z) = \frac{B(0)}{z}U(z)$$

と同値である.

この命題を証明するため, 2 つ補題を用意する.

補題 1.10. 系 $dU/dz = A(z)U$ が確定特異点型ならば, 任意のベクトル値有理型関数 $C(z) \in K^n$ に対し微分方程式

$$\frac{d}{dz}U = A(z)U + C(z)$$

の任意の形式解は収束する.

証明. 定理 1.6 より, $A(z) = z^{-1}\Gamma$ と仮定して良い (Γ は定数行列). $U(z) = \sum_{k \geq k_0} z^k U_k$ を系の形式解とする. $C(z) = \sum z^k C_k$ として, 方程式を形式的冪級数の間の等式と見ると

$$kU_k = \Gamma U_k + C_{k-1}$$

が得られる. 行列 $(kI - \Gamma)$ は十分大きな k に対し可逆であり, またその逆行列のノルム $\|(kI - \Gamma)^{-1}\|$ は $k \rightarrow \infty$ で 0 に収束する. 故に十分大きな k で

$$\|U_k\| = \|(kI - \Gamma)^{-1}C_{k-1}\| < \|C_{k-1}\|$$

となり, 従って U は収束する. □

注意 1.11. Malgrange は上の補題の逆の主張を示した. すなわち, もし任意の $C(z) \in K^n$ に対し非同次線型常微分方程式系 $\frac{d}{dz}V = A(z)V + C(z)$ の任意の形式解が収束するならば, 系 $\frac{d}{dz}U = A(z)U$ は確定特異点型である. 従って補題の必要条件は確定特異点型線型常微分方程式系の新たな特徴付けを与える.

補題 1.12. P, Q を n 次複素正方行列とする. このとき X に対する方程式

$$PX - XQ = Y$$

が任意の Y について唯一つの解を持つための必要十分条件は, P と Q が共通の固有値を持たない事である.

証明. 方程式は線型であるから $Y = 0$ の場合のみ考えれば良い. まず P と Q が共通の固有値 λ を持つと仮定する. P 及び Q^T (Q の転置行列) それぞれの λ 固有ベクトル v, w を取り,

$$X = vw^T$$

と定めると,

$$PX - XQ = Pvw^T - vw^TQ = \lambda vw^T - \lambda vw^T = 0$$

となる. $X \neq 0$ であるから主張の片側が示された.

逆に P と Q が共通の固有値を持たないと仮定する． λ を Q の固有値とし， $v \neq 0$ を λ に対応する Q の一般化固有ベクトルとする．すなわち適当な正の整数 k で

$$(Q - \lambda I)^k v = 0$$

が成り立つとする．このとき $PX - XQ = 0$ ならば

$$(P - \lambda I)^k Xv = X(Q - \lambda I)^k v = 0$$

となり，故に仮定から $Xv = 0$ が得られる． v として全ての一般化固有ベクトルを走らせる事で，これから $X = 0$ が従う． $\square$

命題 1.9 の証明．まず最初に，与えられた系が $\frac{d}{dz}V = \frac{B(0)}{z}V$ に形式的に同値である事を見る．すなわち，行列値の形式的冪級数

$$M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k M_k, \quad M_0 = 1$$

が存在し，

$$\frac{d}{dz}M = \frac{B(0)}{z}M - M\frac{B(z)}{z} \quad (1.5)$$

となる事を示す．

$B(z) = \sum_{k \geq 0} z^k B_k$ とすると，(1.5) は次の方程式系と同値である：

$$(B_0 - kI)M_k - M_k B_0 = \sum_{i=0}^{k-1} M_i B_{k-i}.$$

k についての帰納法で， M_i は全ての $i < k$ で既に決定していると仮定して良い．すると上の方程式は， $(B_0 - kI)$ と B_0 が共通の固有値を持たないという仮定から，補題 1.12 により唯一つの解 M_k を持つ．

このようにして求める形式的冪級数 $M(z)$ が得られた．これの収束性は，(1.5) を未知関数 M に対する (明らかに確定特異点型の) 線型常微分方程式系とみて，補題 1.10 を適用する事で示される． $\square$

$B(0)$ が命題 1.9 の条件を満たさない場合は，同値変形によって $B(0)$ の固有値を整数分ずらす事ができ，この操作を有限回繰り返す事により命題 1.9 の状況に帰着させる事が可能である．

系を適当な定数行列で変換する事により， $B(z)$ は次のようなブロック行列の形をしていると仮定して良い：

$$B(z) = \begin{pmatrix} C(z) & zF(z) \\ G(z) & D(z) \end{pmatrix}.$$

ただし $C(z)$, $F(z)$, $G(z)$, $D(z)$ は全て正則関数であり， $C(0)$ は唯一つの固有値 λ_1 を持ち，これは $D(0)$ の固有値 $\lambda_2, \dots, \lambda_k$ 全てと異なるとする．このとき

$$M(z) = \begin{pmatrix} z^{-1}I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

と定めると，これによって変換された系 $\frac{d}{dz}V = \frac{\tilde{B}}{z}V$ の行列は

$$\tilde{B}(z) = \begin{pmatrix} C(z) - I_p & F(z) \\ zG(z) & D(z) \end{pmatrix}$$

と表され， $\tilde{B}(0)$ の固有値は $\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ となる．

上の考察から， $B(0)$ の相異なる固有値の組で整数差のものがある場合，モノドロミーは $B(z)$ の高次の項に依存する事が分かる．

2. 有理型接続による再定式化

2.1. 有理型接続と常微分方程式系

有理型接続の $0 \in \mathbb{C}$ における芽 (以後これを単に**有理型接続**と呼ぶ) とは, K 上の有限次元ベクトル空間 M 及び $\mathbb{C}$ 線型作用素 $\nabla: M \rightarrow M$ の組で, 条件

$$\nabla(hu) = \frac{dh}{dz}u + h\nabla u \quad (h \in K, u \in M)$$

を満たすものをいう. ∇ を省略して単に M と表す事もある.

有理型接続 M は自然に $\mathcal{D}[1/z]$ 加群の構造を持つ. 微分作用素 $P = \sum a_i \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-i}$ の $u \in M$ に対する作用は $Pu = \sum a_i \nabla^{n-i}u$ で与えられる. 逆に, K 上有限次元な任意の $\mathcal{D}$ 加群は有理型接続である.

$e_1, \dots, e_n$ を M の K 上の基底とし,

$$\nabla e_i = - \sum_j a_{ji}(z)e_j, \quad A = (a_{ij}(z)) \in \text{End}(n, K)$$

とすれば, $u = \sum u_i(z)e_i$ に対する ∇ の作用は

$$\nabla u = \sum_i \left(\frac{du_i}{dz} - \sum_j a_{ij}(z)u_j(z) \right) e_i$$

となる. 従って方程式 $\nabla u = 0$ を考える事と線型常微分方程式系

$$\frac{d}{dz}U = AU$$

を考える事は同じであり, またこれにより n 個の未知関数に対する同次線型常微分方程式系の同値類と K 上 n 次元の有理型接続の同型類は 1 対 1 に対応する.

2.2. 有理型接続の構成

与えられた有理型接続 (M, ∇) に対し, その**双対** (M^*, ∇^*) が

$$M^* = \text{Hom}_K(M, K), \quad \langle \nabla^* \varphi, u \rangle = - \langle \varphi, \nabla u \rangle \quad (\varphi \in M^*, u \in M)$$

によって定まる.

(M_i, ∇_i) ($i = 1, 2$) を有理型接続とすると, その**直和** $(M_1 \oplus M_2, \nabla_1 \oplus \nabla_2)$, **テンソル積** $(M_1 \otimes M_2, \nabla_1 \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_2)$, そして $(\text{Hom}_K(M_1, M_2), \nabla)$ が $(\nabla \varphi)(u) = \nabla_2(\varphi(u)) - \varphi(\nabla_1 u)$ によって定まる.

(M_1, ∇_1) から (M_2, ∇_2) への**射**とは, K 線型写像 $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ であって $\nabla_2 \varphi = \varphi \nabla_1$ を満たすものをいう.

以上の構成法は, 線型常微分方程式系の古典的な理論でもよく用いられる. 例えば, 基底を取る事で M から定まる系に対し, その双対基底によって M^* から定まる系はもとの系の**随伴系**と呼ばれる.

M_α を $e \in M$ を基底とする 1 次元の有理型接続で接続 ∇ を $z\nabla e = -\alpha e$ で定めてできるものとする, $M \otimes M_\alpha$ に付随する系はもとの系 $\frac{d}{dz}U = A(z)U$ を変数変換 $V = z^\alpha U$ によって変換して得られる系となる. また命題 1.9 の証明で用いた系は $\text{Hom}_K(M, M)$ に付随するものに他ならない.

2.3. 巡回元の構成

(M, ∇) を K 上 n 次元の有理型接続とする. $v \in M$ が M の**巡回元**であるとは, $v, \nabla v, \dots, \nabla^{n-1}v$ が K 上 M を張るときにいう.

命題 2.1. 任意の有理型接続は巡回元を持つ.

証明. M の基底 $e_1, \dots, e_n$ を取り,

$$\nabla e_i = - \sum_j a_{ji}(z) e_j$$

とする. また $\epsilon > 0$ を十分小さく取って $a_{ji}(z)$ が D_ϵ で有理型, D_ϵ° 上正則であるとしておく.

今 $a \in D_\epsilon^\circ$ を任意に取って固定し,

$$\bar{e}_i = \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(a-z)^k}{k!} \nabla^k e_i$$

と定め, $l \leq n-i$ に対し $\nabla^l \bar{e}_i$ を $e_1, \dots, e_n$ の線型結合で表した時の係数の $z = a$ における値を見る. そのためにこのみで用いる記号として, $w = \sum_i c_i(z) e_i \in M$ に対し (各 c_i が a の周りで正則なとき) $w(a) = \sum_i c_i(a) e_i$ とおくと,

$$\begin{aligned} (\nabla^l \bar{e}_i)(a) &= \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \frac{1}{k!} \left(\left(\frac{d}{dz} \right)^j (a-z)^k \right) (a) (\nabla^{k+l-j} e_i)(a) \\ &= \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} (-1)^j (\nabla^l e_i)(a) = 0 \end{aligned}$$

となる事が分かる.

この考察をもとに

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{(z-a)^{i-1}}{(i-1)!} \bar{e}_i$$

と定める. $l \leq n-1$ のとき,

$$\begin{aligned} (\nabla^l v)(a) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \frac{1}{(i-1)!} \left(\left(\frac{d}{dz} \right)^j (z-a)^{i-1} \right) (a) (\nabla^{l-j} \bar{e}_i)(a) \\ &= \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} (\nabla^{l-j} \bar{e}_{j+1})(a) = \bar{e}_{l+1}(a) = e_{l+1} \end{aligned}$$

であるから,

$$v \wedge \nabla v \wedge \dots \wedge \nabla^{n-1} v = h(z) e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

によって有理型関数 $h(z)$ を定めると, $h(a) = 1$ が成立する. 従って特に $h(z)$ の $z = 0$ における芽は 0 でない. 故に $v, \nabla v, \dots, \nabla^{n-1} v$ は K 上線型独立, すなわち v は巡回元である. $\square$

系 2.2. 全ての K 上 n 次元の有理型接続は有理型関数を係数とする n 階単独線型常微分方程式 $Pu = 0$ から誘導される. 言い換えれば, 任意の (有理型関数を係数とする) n 連立 1 階線型常微分方程式は, ある n 階単独線型常微分方程式 $Pu = 0$ に付随する系と同値である.

証明. v を M^* の巡回元とし,

$$(\nabla^*)^n v = - \sum_{i=1}^n b_i (\nabla^*)^{n-i} v$$

とする. このとき基底 $v, \nabla^* v, \dots, (\nabla^*)^{n-1} v$ に関する ∇^* の行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -b_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -b_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -b_1 \end{pmatrix}$$

となる。従って M の双対基底における ∇ の行列表示は

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & & b_1 \end{pmatrix}$$

となり、対応する系は

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dz} &= u_2, \dots, \frac{du_{n-1}}{dz} = u_n, \\ \frac{du_n}{dz} &= -b_n u_1 - \cdots - b_1 u_n \end{aligned}$$

と書かれる。これは線型常微分方程式

$$Pu = \left(\frac{d}{dz}\right)^n u + b_1 \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} u + \cdots + b_n u = 0$$

に付随する系に他ならない。 □

2.4. 確定特異点型接続

定義 2.3. 有理型接続 M が**確定特異点型**であるとは、 M の K 上の基底 $e_1, \dots, e_n$ が存在して

$$z\nabla e_i = -\sum_j b_{ji}(z)e_j \quad (b_{ij}(z) \in \mathcal{O})$$

が成り立つ事をいう。

定理 1.6 より、上の条件は各 $b_{ij}(z)$ が定数であるような基底の存在と同値である。更に行列 $B = (b_{ij})$ が Jordan 標準形で、その固有値の実部が $[-1, 0)$ に属す事を要求する事もできる。

系 2.4. 有理型接続 $M_{\alpha, l}$ を、 $e_1, e_2, \dots, e_l$ を基底とし接続 ∇ を

$$z\nabla e_i = \alpha e_i + e_{i+1}$$

によって定めたものとする。このとき任意の有理型接続 M は $M_{\alpha, l}$ 達の直和となる。

系 2.5. 全ての確定特異点型有理型接続は $\mathcal{D}$ 加群として有限生成である。

命題 2.6.

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

を有理型接続の完全系列とする。このとき M が確定特異点型である事と M' , M'' がどちらも確定特異点型である事は同値である。

証明. $e_1, \dots, e_n$ を M の基底でその内 $e_1, \dots, e_k$ が M' の基底をなすものとする。この基底に付随する系

$$\frac{d}{dz}U = AU \tag{2.1}$$

の行列 $A(z)$ は

$$A(z) = \begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$$

とブロック三角行列で表される．従って系 (2.1) は次の 2 つの系からなる連立系と同値である：

$$\frac{d}{dz}U' = A'U' + BU'' \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dz}U'' = A''U'' \quad (2.3)$$

もし M が確定特異点型であるならば，定理 1.6 より (2.1) の任意の解は穏やかな増大度を持つ．従って特に上の連立系の解で $U'' = 0$ を満たすもの，すなわち系 $\frac{d}{dz}U' = A'U'$ の解は全て穏やかな増大度を持ち，また同様に系 (2.3) の解も全て穏やかな増大度を持つ．従って定理 1.6 より M' , M'' はどちらも確定特異点型である．

逆に M' , M'' が確定特異点型であるとする．このとき必要ならば基底 e_i を取り直す事で A' , A'' はどちらも極の位数が高々 1 であるとして良い．定理 1.6 より，系 (2.3) の任意の解 U'' は穏やかな増大度を持ち，故にこれに行列 B を掛けた BU'' も穏やかな増大度を持つ．示さなければならないのは，この状況で系 (2.2) の任意の解 U' が穏やかな増大度を持つ事である．実際これが示されれば定理 1.6 より M は確定特異点型である事が従う．

$S^T(z)$ を随伴系 $\frac{d}{dz}V = -(A')^TV$ の基本解行列で，ある点 $z_0 \in D_\epsilon^\circ$ において単位行列であるようなものとする．このとき与えられた U'' に対する系 (2.2) の解 $U'(z)$ は初期値を $U'(z_0)$ として次式で与えられる：

$$U'(z) = S^{-1}(z) \left(U'(z_0) + \int_{z_0}^z S(w)B(w)U''(w)dw \right).$$

$S(z)$ は穏やかな増大度を持つから，上式の第 2 項も穏やかな増大度を持つ．従って $U'(z)$ も穏やかな増大度を持つ．これで主張が示された． $\square$

■有理型接続の逆像 $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数の原点における 0 でない芽とし， $h(0) = 0$ とする．便宜上， h の定義域に当たる複素平面の座標を z ，行き先の複素平面における座標を w で表し，それぞれにおける構造層の原点における茎を $\mathcal{O}_z$, $\mathcal{O}_w$ で表す事にする． h による逆像は写像 $h^*: \mathcal{O}_w \rightarrow \mathcal{O}_z$ を定め，これによって $\mathcal{O}_z$ に $\mathcal{O}_w$ 加群の構造が定まる事に注意する．

M を有理型接続（行き先の複素平面の原点における芽と考えている）とすると，その**逆像** h^*M が次のようにして定義される： h^*M は $K = \mathcal{O}_z[1/z]$ 上のベクトル空間としては

$$\mathcal{O}_z \otimes_{\mathcal{O}_w} M = \mathcal{O}_z[1/z] \otimes_{\mathcal{O}_w[1/w]} M$$

で与えられ，その上の接続 ∇ は

$$\nabla(f \otimes u) = \frac{df}{dz} \otimes u + f \frac{dh}{dz} \otimes \nabla u \quad (f \in \mathcal{O}_z, u \in M)$$

で与えられる．これは矛盾なく定まっている．実際 $g \in \mathcal{O}_w$ に対し，

$$\begin{aligned} \nabla(f \otimes gu) &= \frac{df}{dz} \otimes gu + f \frac{dh}{dz} \otimes \nabla(gu) \\ &= \frac{df}{dz} \otimes gu + f \frac{dh}{dz} \otimes \left(\frac{dg}{dw} u + g \nabla u \right) \\ &= \left[\frac{df}{dz} (g \circ h) + f \frac{dh}{dz} \left(\frac{dg}{dw} \circ h \right) \right] \otimes u + f \frac{dh}{dz} (g \circ h) \otimes \nabla u \\ &= \frac{d(f(g \circ h))}{dz} \otimes u + f(g \circ h) \frac{dh}{dz} \otimes \nabla u \\ &= \nabla(f(g \circ h) \otimes u) \end{aligned}$$

となる．またこれが Leibniz 則を満たす事は次のようにして確かめられる：

$$\begin{aligned}
\nabla(fg \otimes u) &= \frac{d(fg)}{dz} \otimes u + fg \frac{dh}{dz} \otimes \nabla u \\
&= \left(\frac{df}{dz}g + f \frac{dg}{dz} \right) \otimes u + fg \frac{dh}{dz} \otimes \nabla u \\
&= \frac{df}{dz}g \otimes u + f \left(\frac{dg}{dz} \otimes u + g \frac{dh}{dz} \otimes \nabla u \right) \\
&= \frac{df}{dz}(g \otimes u) + f \nabla(g \otimes u).
\end{aligned}$$

ただし上の計算では $g \in \mathcal{O}_z$ としている．

$e_1, \dots, e_n$ を M の基底とすると $1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_n$ は h^*M の基底であり，また $\nabla e_i = -\sum_j a_{ji}(w)e_j$ とすると，

$$\begin{aligned}
\nabla(1 \otimes e_i) &= -\frac{dh}{dz} \otimes \sum_j a_{ji}(w)e_j \\
&= -\sum_j \frac{dh}{dz} a_{ji}(h(z))(1 \otimes e_j)
\end{aligned}$$

となる．従って， M に付随する系が $\frac{d}{dw}V = A(w)V$ ならば， h^*M に付随する系は $\frac{d}{dz}U = \frac{dh}{dz}A(h(z))U$ となる．これは変数変換 $w = h(z)$ による微分方程式の変換に他ならない．

$A(w)$ の極の位数が 1 以下である事と $\frac{dh}{dz}A(h(z))$ の極の位数が 1 以下である事は同値であるから，次の命題が直ちに得られる：

命題 2.7. 有理型接続 M が確定特異点型である事と h^*M が確定特異点型である事は同値である．

■**有理型接続の順像** h を先と同じものとし， (N, ∇) を有理型接続とする．今回はこれを h の定義域に当たる複素平面の原点における芽と考える．このとき N の**順像** h_*N が次のようにして定まる： h_*N はベクトル空間としては N 自身を $h^*: \mathcal{O}_w \rightarrow \mathcal{O}_z$ によって $\mathcal{O}_w[1/w]$ 上のベクトル空間とみなしたものであり，その上の接続 ∇_* は

$$\nabla_* u = \frac{1}{h'} \nabla u \quad (u \in M)$$

で与えられる．ただし h' は dh/dz の原点における芽を表す． $g \in \mathcal{O}_w[1/w]$ に対し

$$\begin{aligned}
\nabla_*(g \cdot u) &= \frac{1}{h'} \nabla((g \circ h)u) \\
&= \frac{1}{h'} \left(\frac{dg}{dw} \circ h \right) h' u + \frac{1}{h'} (g \circ h) \nabla u \\
&= \frac{dg}{dw} \cdot u + g \cdot \nabla_* u
\end{aligned}$$

となるから， ∇_* は確かに Leibniz 則を満たしている．

命題 2.8. 有理型接続 N が確定特異点型である事と h_*N が確定特異点型である事は同値である．

証明. 座標変換により $w = h(z) = z^k$ として良い．まず N が確定特異点型であると仮定する．定義から， N の基底 $e_1, \dots, e_n$ で

$$z \nabla e_i = -\sum_j b_{ji} e_j, \quad b_{ji} \in \mathcal{O}_z$$

となるものが存在する．

今 $e_i^r = z^r e_i$ とおくと, $\{e_i^r \mid i = 1, \dots, n, r = 0, \dots, k-1\}$ は $h_* N$ の基底をなす. また

$$\begin{aligned} w \cdot \nabla_* e_i^r &= \frac{h}{h'} \nabla(z^r e_i) \\ &= \frac{z}{k} (r z^{r-1} e_i + z^r \nabla e_i) \\ &= \frac{1}{k} \left(r e_i^r - \sum_j z^r b_{ji} e_j \right) \end{aligned}$$

であり, $z^r b_{ji}(z) e_j$ を e_i^r 達の $\mathcal{O}_w[1/w]$ 線型結合で表した時の係数は $\mathcal{O}_w$ に属す. 従って $h_* N$ も確定特異点型である.

逆に $h_* N$ が確定特異点型であるとする, 命題 2.7 より $h^* h_* N$ は確定特異点型である. 一方, 写像

$$N \rightarrow h^* h_* N; \quad u \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} z^{-i} \otimes z^i u$$

は有理型接続の間の単射である. 実際これが単射である事は明らかで, 接続を保つ事は次のようにして確かめられる:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \nabla(z^{-i} \otimes z^i u) &= \sum_{i=0}^{k-1} ((-i) z^{-i-1} \otimes z^i u + k z^{k-1} z^{-i} \otimes \nabla_*(z^i u)) \\ &= - \sum_{i=0}^{k-1} i z^{-i-1} \otimes z^i u + k \sum_{i=0}^{k-1} z^{k-i-1} \otimes \frac{1}{k z^{k-1}} (i z^{i-1} u + z^i \nabla u) \\ &= - \sum_{i=0}^{k-1} i z^{-i-1} \otimes z^i u + \sum_{i=0}^{k-1} z^{-i-1} \otimes (i z^i u + z^{i+1} \nabla u) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} z^{-i-1} \otimes z^{i+1} \nabla u \\ &= z^{-k} \otimes z^k \nabla u + \sum_{i=0}^{k-2} z^{-i-1} \otimes z^{i+1} \nabla u \\ &= 1 \otimes \nabla u + \sum_{i=1}^{k-1} z^{-i} \otimes z^i \nabla u \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} z^{-i} \otimes z^i \nabla u. \end{aligned}$$

故に命題 2.6 より N は確定特異点型である. □

第 II 部

確定特異点型接続

3. 序

X を複素多様体とする．本章では，複素多様体に対し常に連結性，パラコンパクト性を仮定する． $\mathcal{O}_X$ を X 上の正則関数のなす層， $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し Ω_X^p を X 上の p 次正則微分形式のなす層とする． F を X 上のベクトル束，すなわち有限階数の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群とする．

F 上の**接続**とは， $\mathbb{C}_X$ 線型な射 $\nabla: F \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} F$ で Leibniz 則

$$\nabla(\varphi f) = d\varphi \otimes f + \varphi \nabla f \quad (f \in F, \varphi \in \mathcal{O}_X)$$

を満たすものの事であった．接続 ∇ は各 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $\mathbb{C}_X$ 線型な射 $\nabla: \Omega_X^p \otimes_{\mathcal{O}_X} F \rightarrow \Omega_X^{p+1} \otimes_{\mathcal{O}_X} F$ で条件

$$\nabla(\omega \otimes f) = d\omega \otimes f + (-1)^p \omega \wedge \nabla f \quad (f \in F, \omega \in \Omega_X^p)$$

を満たすものを一意的に定める．接続 ∇ は $\nabla^2 = 0$ を満たすとき**可積分**であるという．本章では可積分接続しか扱わない．そこで**次節以降，可積分接続を単に接続と呼ぶ事にする．**

X 上に 2 つの接続 $(F, \nabla), (G, \nabla)$ が与えられたとき， F から G への $\mathcal{O}_X$ 加群準同型で ∇ と可換なものを接続 (F, ∇) から (G, ∇) への射という．

可積分接続に関する次の結果は非常に基本的である．

定理 3.1. 可積分接続 (F, ∇) に対し， F の**水平切断**のなす層，すなわち F の切断 f で $\nabla f = 0$ を満たすもののなす層を F^∇ で表すとき，次が成立する．

- (i) F^∇ は局所的に $\mathbb{C}_X^m$ (ただし m は F の階数) と同型である．すなわち F^∇ は X 上の階数 m の**局所系**となる．
- (ii) 関手 $(F, \nabla) \mapsto F^\nabla$ によって， X 上の可積分接続のなす圏と X 上の局所系のなす圏は同値である．

証明. まず (i) を $n = \dim X$ に関する帰納法で示そう． $n = 1$ の場合は，線型常微分方程式の解の存在と一意性の定理から明らかである． $n > 1$ とし， $n - 1$ まで主張が正しいと仮定する．問題は局所的なので， X は $\mathbb{C}^n$ 内の多重円盤 $\Delta^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| < \epsilon\}$ ， F はその上の自明束としてよい．このとき $\nabla = d - A$ として X 上の行列値 1 次微分形式 A が定まる． $A = \sum_i A_i dz_i$ としよう．すると F の切断 f に対する条件 $\nabla f = 0$ は次のように書き表される：

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = A_i f, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

示すべきは，任意の m 次元ベクトル $f_0 = {}^t(f_0^1, \dots, f_0^m)$ に対し， f_0 を初期値とする上の微分方程式系の解 f が一意的に存在する事である．

帰納法を適用するため， $A'_i(z_2, \dots, z_n) = A_i(0, z_2, \dots, z_n)$ として Δ^{n-1} 上で次の方程式系を考える：

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = A'_i f, \quad i = 2, \dots, n.$$

これは Δ^{n-1} 上の接続 $\nabla' = d - \sum_{i \geq 2} A'_i dz_i$ に関する水平切断の方程式に他ならない． ∇ の可積分性から ∇' も可積分であるから，帰納法の仮定により初期値を f_0 とする上の微分方程式系の解 $f'(z_2, \dots, z_n)$ が一意的に存在する．そこで $(z_2, \dots, z_n)$ を任意に固定し，初期値を $f'(z_2, \dots, z_n)$ とする線型常微分方程式 $\partial f / \partial z_1 = A_1 f$ の一意的な解を f とする．パラメータ付き微分方程式の解のパラメータへの依存に関する定理により f は X 上

正則であり，作り方から条件

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = A_1 f, \quad \frac{\partial f}{\partial z_i} \Big|_{z_1=0} = A_i f|_{z_1=0}, \quad i = 2, \dots, n$$

を満足する．ここで 2 番目の式が $z_1 \neq 0$ でも成立する事を示す．任意の $i \geq 2$ を 1 つ固定し $g = \partial f / \partial z_i - A_i f$ とおく． g の z_1 に関する偏微分を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial z_1} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_i} - \frac{\partial A_i}{\partial z_1} f - A_i \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_i} - \frac{\partial A_i}{\partial z_1} f - A_i A_1 f \end{aligned}$$

となるが，ここで可積分条件 $\nabla^2 = 0$ から従う等式

$$\frac{\partial A_i}{\partial z_1} - \frac{\partial A_1}{\partial z_i} = [A_1, A_i]$$

を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial z_1} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_i} - \frac{\partial A_1}{\partial z_i} f - A_1 A_i f \\ &= \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} - A_1 f \right) + A_1 \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} - A_i f \right) \\ &= A_1 g \end{aligned}$$

を得る．すなわち， $(z_2, \dots, z_n)$ を任意に固定して g を z_1 の関数とみなせば，これは線型常微分方程式 $\partial g / \partial z_1 = A_1 g$ の解である．この初期値は 0 であるから，一意性定理より $g \equiv 0$ ，すなわち $\partial f / \partial z_i - A_i f \equiv 0$ でなければならない．故に f は $f(0) = f_0$ を満たす ∇ の水平切断である． f の一意性の証明は容易なので割愛する．

(ii) の証明は，逆の対応を与えるに留める (残りの部分の証明は容易である)． X 上の局所系 V に対し $F = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} V$ とおき， F 上の接続を

$$\nabla(\varphi \otimes v) = d\varphi \otimes v$$

によって定めれば， (F, ∇) は X 上の可積分接続である．これが逆の対応を与える． $\square$

注意 3.2. 接続の概念は F が一般の連接 $\mathcal{O}_X$ 加群の場合でも定義する事ができるが，接続が存在すれば F は自動的に局所自由になってしまう事が知られている．

局所系を考える事は基本群の有限次元表現を考える事と同値である．より正確に言えば，任意の $a \in X$ に対し， X 上の局所系のなす圏と基本群 $\pi_1(X, a)$ の有限次元複素表現のなす圏の間には自然な同値が存在する．

さて X を $\mathbb{C}$ 上の非特異射影代数多様体とし， X^{an} をそれに付随する複素多様体とする． $i: X^{\text{an}} \rightarrow X$ を自然な包含写像とすると，GAGA により関手 $F \mapsto F^{\text{an}} = \mathcal{O}_{X^{\text{an}}} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_X} i^{-1}F$ は X 上のベクトル束のなす圏と X^{an} 上のベクトル束のなす圏の間の圏同値を与える．この対応によって，それぞれの上の (可積分) 接続も対応する事を示そう．今 $\Lambda_X^1 = \mathcal{O}_X \oplus (\Omega_X^1)^{\vee}$ に両側 $\mathcal{O}_X$ 加群の構造を

$$a \cdot (\varphi, v) = (a\varphi, av), \quad (\varphi, v) \cdot a = (a\varphi + \langle da, v \rangle, av)$$

によって定める．すると F 上の接続 $\nabla: F \rightarrow \Omega_X^1 \otimes F$ と $\mathcal{O}_X$ 加群準同型 $\Phi: \Lambda_X^1 \otimes F \rightarrow F$ で合成

$$F = \mathcal{O}_X \otimes F \rightarrow \Lambda_X^1 \otimes F \xrightarrow{\Phi} F$$

(ただし左側は自然な射) が恒等射であるようなものは，次式によって 1 対 1 対応する：

$$\Phi((\varphi, v) \otimes f) = \varphi f + \nabla_v f.$$

ここで $\nabla_v f$ は $v \in (\Omega_X^1)^\vee$ が与える射 $\Omega_X^1 \otimes F \rightarrow F$ で ∇f を移したものである。GAGA によって上のような Φ と $\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ 加群準同型 $\Phi^{\text{an}}: \Lambda_{X^{\text{an}}}^1 \otimes F^{\text{an}} \rightarrow F^{\text{an}}$ で合成 $F^{\text{an}} \rightarrow \Lambda_{X^{\text{an}}}^1 \otimes F^{\text{an}} \xrightarrow{\Phi^{\text{an}}} F^{\text{an}}$ が恒等射となるものが 1 対 1 対応し、更にこのような Φ^{an} は F^{an} 上の接続 ∇^{an} と 1 対 1 対応する。故に F 上の接続と F^{an} 上の接続は 1 対 1 対応する。またこの対応によって可積分性が保たれる事は明らかである。

従って、最終的に X 上の可積分接続のなす圏と X^{an} 上の局所系のなす圏の間の同値が得られた事になる。本章における 1 つの目標は、 X が非射影的 (更には非固有) な非特異代数多様体の場合にこれと同様の結果を得る事にある。先走って言えば、この場合接続に対し**確定特異点型**と呼ばれる条件を付ける事で同様の結果が得られる。

4. 有理型接続

X を複素多様体、 Y を X の因子とする。 X 上の有理型関数で Y 上にのみ極を許したもののなす層を $\mathcal{O}_X[Y]$ で表す。 φ を Y の局所定義方程式とすると局所的に $\mathcal{O}_X[Y] = \mathcal{O}_X[\varphi^{-1}] \simeq \mathcal{O}_X[t]/\mathcal{O}_X[t](t\varphi - 1)$ であるから、 $\mathcal{O}_X[Y]$ は環の層として接続である。

定義 4.1. 接続 $\mathcal{O}_X[Y]$ 加群 $\tilde{F}$ と $\mathbb{C}_X$ 準同型 $\nabla: \tilde{F} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{F}$ で条件

- (i) (Leibniz 則) $\nabla(\varphi f) = d\varphi \otimes f + \varphi \nabla f \quad (f \in F, \varphi \in \mathcal{O}_X[Y])$,
- (ii) (可積分条件) $\nabla^2 = 0$

を満たすもののなす組 $(\tilde{F}, \nabla)$ を X 上の Y に沿った**有理型接続**と呼ぶ。

簡単のため、 ∇ を省略して単に $\tilde{F}$ で有理型接続を表してしまう事がある。また $F = \tilde{F}|_{X-Y}$ とおく事が多い。注意 3.2 より F は $X - Y$ 上のベクトル束となる事に注意する。

接続 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\tilde{F}$ 及び $F = \tilde{F}|_{X-Y}$ 上の接続 ∇ が与えられているとすると、後に示す命題 4.3 より、 ∇ の $\tilde{F}$ 全体への (有理型接続としての) 拡張は存在すれば一意である。

定義 4.2. ある接続 $\mathcal{O}_X$ 加群 G が存在して $\tilde{F} = \mathcal{O}_X[Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} G$ となるとき、 $\tilde{F}$ は**効果的**であるという。

命題 4.3. 接続 $\mathcal{O}_X[Y]$ 加群 $\tilde{F}$ で台を Y に持つようなものは 0 のみである。

証明. φ を Y の局所定義方程式とする。 $\tilde{F}$ の任意の切断 s に対し接続 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{O}_X s$ を考えると、仮定及び Hilbert の零点定理から十分大きな $N > 0$ で $\varphi^N s = 0$ が成り立つ事が分かる。故に $s = 0$ である。 $\square$

上の命題からの系として次が得られる：

命題 4.4. 有理型接続 $\tilde{F}$ は $\mathcal{O}_X[Y]$ 加群として反射的である。

注意 4.5. 有理型接続の概念は Y が一般の解析的閉集合の場合にも考える事ができるが、次のような理由により Y が因子の場合に帰着されてしまう：もし $\text{codim } Y \geq 2$ ならば、 X の基本群と $X - Y$ の基本群は一致する。従って定理 3.1 により $X - Y$ 上の任意の接続は X 上に一意的に拡張される。

5. 確定特異点型接続

前節のように、 Y を X の因子、 $(\tilde{F}, \nabla)$ を X 上の Y に沿った有理型接続とする。

複素多様体 Z 、及び射 $u: Z \rightarrow X$ で $u^{-1}(Y)$ が Z の因子になっているようなものに対して、 Z 上の $u^{-1}(Y)$

に沿った有理型接続 $u^*(\tilde{F}, \nabla)$ を定義しよう。まず

$$\mathcal{O}_Z[u^{-1}(Y)] \simeq \mathcal{O}_Z \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_X} u^{-1}\mathcal{O}_X[Y]$$

となる事に注意する。実際、 φ を Y の局所定義方程式とすれば、局所的には $\mathcal{O}_X[Y] = \mathcal{O}_X[\varphi^{-1}]$, $\mathcal{O}_Z[u^{-1}(Y)] = \mathcal{O}_Z[(u^*\varphi)^{-1}]$ となる事から上式は直ちに従う。そこで $u^*\tilde{F} := \mathcal{O}_Z \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_X} u^{-1}\tilde{F}$ と定める。上で注意した事からこれには (接続) $\mathcal{O}_Z[u^{-1}(Y)]$ 加群の構造が自然に定まる事が分かる。

次に $u^*\tilde{F}$ 上の接続 $u^*\nabla$ を定めるため、点 $a \in Z$ における局所座標 $(z_1, \dots, z_p)$ 及び点 $b = u(a) \in X$ における局所座標 $(x_1, \dots, x_n)$ を取る。 $\psi \otimes f \in \mathcal{O}_{Z,a} \otimes_{\mathcal{O}_{X,b}} \tilde{F}_b = (u^*\tilde{F})_a$ に対し

$$(u^*\nabla)(\psi \otimes f) = d\psi \otimes u^*f + \psi \sum_i du_i \otimes u^*f_i, \quad f_i = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f, \quad u_i = x_i \circ u$$

とおけば (ただし $u^*f = 1 \otimes f \in \tilde{F}_b = (u^*\tilde{F})_a$)、次を確かめる事ができる：

- (i) 上式は well-defined な射 $(u^*\tilde{F})_a \rightarrow \Omega_{Z,a}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{Z,a}} (u^*\tilde{F})_a$ を定める；
- (ii) この定義は座標系の取り方に依らない。

((i) の証明は u が閉埋め込みの場合と射影の場合に分けて行えばよい。) またこれが Leibniz 則及び可積分条件を満足する事は容易に確かめられる。

以上により Z 上の $u^{-1}(Y)$ に沿った有理型接続 $u^*(\tilde{F}, \nabla)$ が定まる。そこで特に Z として円盤 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ を取り、 $u^{-1}(Y) = 0$ を満たす射を考える。このとき $u^*(\tilde{F}, \nabla)$ の $0 \in D$ における芽は 2.1 節の意味の有理型接続を定める。

定義 5.1. $(\tilde{F}, \nabla)$ が**確定特異点型**であるとは、任意の円盤 D からの任意の射 $u: D \rightarrow X$ で $u^{-1}(Y) = \{0\}$ を満たすものに対し $u^*(\tilde{F}, \nabla)$ が確定特異点型である事をいう。

$\dim X = 1$ の場合、命題 2.7 より上の定義は定義 2.3 と同値になる。

命題 5.2. (i) $0 \rightarrow (\tilde{F}, \nabla) \rightarrow (\tilde{G}, \nabla) \rightarrow (\tilde{H}, \nabla) \rightarrow 0$ を完全列とすると、 $(\tilde{F}, \nabla)$ と $(\tilde{H}, \nabla)$ が確定特異点型である事と $(\tilde{G}, \nabla)$ が確定特異点型である事は同値である。

(ii) $(\tilde{F}, \nabla)$ と $(\tilde{G}, \nabla)$ が確定特異点型であれば $(\tilde{F} \otimes \tilde{G}, \nabla)$ 及び $(\mathcal{H}om(\tilde{F}, \tilde{G}), \nabla)$ も確定特異点型である。

(iii) Z を複素多様体とし $u: Z \rightarrow X$ を $u^{-1}(Y)$ が因子になるような射とする。もし $(\tilde{F}, \nabla)$ が確定特異点型ならば、 $u^*(\tilde{F}, \nabla)$ も確定特異点型である。

証明. (i) は命題 2.6 から従う。(ii) を示そう。 Z を複素多様体、 $u: Z \rightarrow X$ を $u^{-1}(Y)$ が因子になるような射とすると、明らかに $u^*(\tilde{F} \otimes \tilde{G}) = u^*\tilde{F} \otimes u^*\tilde{G}$ となる。また

$$u^*\mathcal{H}om(\tilde{F}, \tilde{G}) = \mathcal{H}om(u^*\tilde{F}, u^*\tilde{G})$$

となる事は、左側から右側への自然な射が Y の外で同型である事と命題 4.3 から従う。故に (ii) は $\dim X = 1$ の場合に帰着され、この場合の証明は容易である。(iii) は明らかである。 $\square$

6. 正規交叉因子

この節では Y を X の正規交叉因子とする。

G を X 上のベクトル束とし、 $\mathcal{O}_X[Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} G$ 上の接続 ∇ を考える、すなわち $(\mathcal{O}_X[Y] \otimes G, \nabla)$ を X 上の Y に沿った有理型接続とする。点 $a \in Y$ の近傍において座標系 $(x_1, \dots, x_n)$ を取り Y を局所的に

$x_1 \cdots x_p = 0$ ($1 \leq p \leq n$) と表し, またその近傍上で G の基底 $g_1, \dots, g_m$ を取っておく. このとき a の近傍上の行列値 1 次微分形式 $\omega = \sum N^k dx_k$, $N^k = (n_{ij}^k)$ が次式によって定まる:

$$\nabla g_j = \sum_{i,k} n_{ij}^k dx_k \otimes g_i.$$

定義 6.1. 次の条件が満たされるとき, ∇ は a において G に対し**対数型の極を持つ**という:

- $k \geq p+1$ のとき N^k は正則, かつ
- $k \leq p$ のとき $M_k = x_k N^k$ は正則である.

この定義は座標系及び基底の取り方に依らないが, G の取り方には依存する. すなわち, $\mathcal{O}_X[Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} G$ の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 部分加群 G' で $\mathcal{O}_X[Y]$ 上全体を生成するものを取り, G' の基底に関して ∇ が与える行列値微分形式 ω' を考えると, ω が定義 6.1 の条件を満たしても ω' が満足するとは限らない.

$Y_1, \dots, Y_p$ をそれぞれ $x_1 = 0, \dots, x_p = 0$ で定義される a の近傍上の因子とする. このとき ∇ の Y_k 上の基底 $\{g_i\}$ に関する**留数**を行列 $M_k|_{Y_k}$ で定める. これは座標系の取り方には依存しない. 実際, $x'_1, \dots, x'_n$ を別の座標系で Y が $x'_1 \cdots x'_q = 0$ で表されているとすると, $p = q$ でなければならず, 更に適当に座標の添え字を置換して $Y_k = \{x'_k = 0\}$ とできる. 従って x'_k/x_k は可逆な正則関数であり, 故に

$$\frac{dx'_k}{x'_k} = \frac{dx_k}{x_k} + (\text{正則微分形式})$$

となる. これから結果が従う.

G の基底の取り替えによる振る舞いをみる事により, Y_k における留数は $\text{End } G|_{Y_k}$ の (基底に依らない) 切断 $\text{Res}_{Y_k} \nabla$ を与える事が分かる. 可積分条件 $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ を N^k で表した等式

$$\frac{\partial N^i}{\partial x_j} - \frac{\partial N^j}{\partial x_i} = [N^i, N^j]$$

において, $Y_i \cap Y_j$ の近くで両辺を x_i と x_j で Laurent 展開し $x_i^{-1} x_j^{-1}$ の係数を比較する事により, $Y_i \cap Y_j$ 上で次式が成り立つ事が分かる:

$$[\text{Res}_{Y_i} \nabla, \text{Res}_{Y_j} \nabla] = 0.$$

簡単のため $i = 1$ とする. $Y_1 - \bigcup_{j \neq 1} Y_j$ 上で ω は

$$\omega = \frac{M^1}{x_1} dx_1 + \sum_{i=2}^n N^i dx_i$$

と表される. ここで

$$\overline{M}^1 = M^1|_{Y_1}, \quad \overline{N}^j = N^j|_{Y_1} \quad (j \geq 2)$$

とおくと, 可積分条件から

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{N}^j}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{N}^k}{\partial x_j} &= [\overline{N}^j, \overline{N}^k] \quad (j, k \geq 2), \\ \frac{\partial \overline{M}^1}{\partial x_j} &= [\overline{M}^1, \overline{N}^j] \quad (j \geq 2) \end{aligned}$$

を得る. 最初の式は $\sum_{j=2}^n \overline{N}^j dx_j$ で与えられる $G|_{Y_1}$ 上の接続が可積分である事を意味し, 2 番目の式はこの接続が与える $\text{End } G|_{Y_1}$ 上の接続に関して $\overline{M}^1 = \text{Res}_{Y_1} \nabla$ が水平切断である事を意味している. 故に, Y_1 が連結ならば (a の近傍を取り替える事でこれは満たされる) $\text{Res}_{Y_1} \nabla$ の共役類は $Y_1 - \bigcup_{j \neq 1} Y_j$ 上一定である. 特に $\text{Res}_{Y_1} \nabla$ の固有値は $Y_1 - \bigcup_{j \neq 1} Y_j$ 上一定であり, 連続性から Y_1 全体でも一定である事が分かる.

今射影 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ の切断 τ を取り固定する. 次の定理がこの節の主結果である.

定理 6.2. Y を X の正規交叉因子とし, (F, ∇) を $X - Y$ 上の接続とする. このとき局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群としての F の拡張 G で次の条件を満足するものが一意に存在する:

- (i) ∇ は G に関して対数型の極を持つ;
- (ii) ∇ の G に関する留数の固有値は τ の像に属す.

一意性の主張より, この結果は局所的に示せば十分である. 従って X は多重円盤 $\{|x_i| < r_i\}$, Y は方程式 $x_1 \cdots x_p = 0$ で定義されていると仮定してよい. $p = 0$ の場合は主張は自明なので, $1 \leq p \leq n$ とする.

■存在性の証明. $a \in X - Y$ を固定する. 3 節で述べた通り, (F, ∇) はそのモノドロミーで決まる. 今 $\pi_1(X - Y, a)$ は $\mathbb{Z}^p$ と同型であり, その (自由) 生成元は $Y_1, \dots, Y_p$ の周りをそれぞれ回る閉曲線で与えられる. 故に $\pi_1(X - Y, a)$ の m 次元複素表現を与える事と, p 個の $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ の元の組 $(C_1, \dots, C_p)$ で $[C_i, C_j] = 0$ を満たすものを与える事は同値である. 従って主張の存在性を示すには, そのような組 $(C_1, \dots, C_p)$ が与えられたとき, 条件 (i) 及び (ii) を満たす (G, ∇) で $(C_1, \dots, C_p)$ をモノドロミーとして持つものの存在を示せばよい.

補題 6.3. 行列 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m)$ で次の条件を満足するものが一意に存在する:

- (i) $\exp(-2\pi\sqrt{-1}\Gamma_j) = C_j$;
- (ii) Γ_j の固有値は τ の像に属す.

更に, このような Γ_j 達は互いに可換である.

この補題 (証明は容易なので省略する) の Γ_j を用いて

$$G = \mathcal{O}_X^{\oplus m}, \quad \omega = \sum_{j=1}^p \Gamma_j \frac{dx_j}{x_j}$$

とおけば結果を得る.

■一意性の証明. 次を示せばよい: (G, ∇) は上で与えられた $G = \mathcal{O}_X^{\oplus m}$, $\omega = \sum_{j=1}^p \Gamma_j dx_j/x_j$ とする. 条件 (i) 及び (ii) を満たす (G', ∇') があり, $X - Y$ 上で同型 $u: (G', \nabla') \rightarrow (G, \nabla)$ が存在したとする. すると u は X 上の同型に拡張される.

X を必要なら小さくする事で, G' は X 上自由であると仮定してよい. G' の基底を取り, それを用いて ∇' から定まる行列値微分形式を ω' とする. すると同型 u は $X - Y$ 上の可逆行列値正則関数 S で $\omega' = S^{-1}\omega S + S^{-1}dS$ を満たすもので与えられる. このとき S 及び S^{-1} が X 上で正則である事を示せばよい.

S に関して主張を示そう (S^{-1} に関しても同様である). 関係式を書き換えると $dS = S\omega' - \omega S$ となる. Hartog の定理より, S が $Y_i - \bigcup_{j \neq i} Y_j$ 上正則である事を示せばよい. 簡単のため $i = 1$ とし, 点 $b \in Y_1 - \bigcup_{j \neq 1} Y_j$ を取る. すると $X - Y$ 上 b の近傍で ω' は

$$\omega' = \frac{M'_1}{x_1} dx_1 + \sum_{i=2}^n N'_i dx_i$$

と表される. ただし M'_1, N'_i は正則である. これを関係式に代入して dx_1 の係数をみると

$$x_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} = SM'_1 - \Gamma_1 S$$

が得られる. 故に $X - Y$ 上 b の近傍で

$$|x_1| \left\| \frac{\partial S}{\partial x_1} \right\| \leq C \|S\|$$

が成立する. 定理 1.6 の証明と同様, Grönwall の不等式を用いて上の不等式から S が b の近傍で有理型である事を示すことが出来る.

S が実際に正則である事をみるため, まず S を $S = \sum S_k x_1^k$ と Laurent 展開し,

$$p = \inf \{ k \mid S_k \neq 0 \}, \quad \overline{M}'_1 = M'_1(0, x_2, \dots, x_n)$$

とおく. すると関係式 $dS = S\omega' - \omega S$ から

$$pS_p = S_p \overline{M}'_1 - \Gamma_1 S_p$$

が得られる. Γ_1 及び $\overline{M}'_1$ はどちらも固有値を τ の像内に持っているため, 補題 1.12 より $p = 0$ でなければならない. 故に S は b において正則である.

7. Riemann-Hilbert 対応

X を複素多様体, Y を X の因子とする. この節では以下の 3 つの定理を同時に示す.

定理 7.1. 関手 $(\tilde{F}, \nabla) \mapsto (\tilde{F}, \nabla)|_{X-Y}$ は X 上の Y に沿った確定特異点型有理型接続のなす圏と $X - Y$ 上の接続のなす圏の間の同値を与える.

定理 7.2. $(\tilde{F}, \nabla)$ を X 上の Y に沿った有理型接続とする. U を Y_{reg} の開集合で Y_{reg} の全ての連結成分と交わるものとし, D を円盤, v を $U \times D$ から U の近傍への同型射で, $U \times \{0\} = U$ 上の恒等写像を導くようなものとする. このとき任意の $y \in U$ に対し $(v^* \nabla)|_{\{y\} \times D}$ が確定特異点型ならば, ∇ は確定特異点型である.

定理 7.3. (i) 任意の確定特異点型有理型接続は効果的である.

(ii) 次のような可換図式が与えられたとする:

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \hookrightarrow & X_1 \\ \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \pi \\ Y & \hookrightarrow & X. \end{array}$$

ここで π は固有射, $\pi^{-1}(Y) = Y_1$ であり, $\pi: X_1 - Y_1 \rightarrow X - Y$ は双正則と仮定する. このときもし $(\tilde{F}, \nabla)$ が X_1 上の Y_1 に沿った確定特異点型有理型接続ならば, $(\pi_* \tilde{F}, \pi_* \nabla)$ も同じ性質を持つ.

まず始めに次の補題を示す. この補題から定理 7.1 の関手が本質的全射である事が従う.

補題 7.4. (F, ∇) を $X - Y$ 上の接続とする. このとき X 上の Y に沿った有理型接続としての (F, ∇) の拡張 $(\tilde{F}, \nabla)$ で

- (i) $\tilde{F}$ は効果的, かつ
- (ii) $(\tilde{F}, \nabla)$ は確定特異点型

であるようなものが存在する.

証明. 広中の特異点解消定理より, 複素多様体 X_1 及び固有射 $\pi: X_1 \rightarrow X$ で, $\pi^{-1}(Y) = Y_1$ が X_1 の正規交叉因子で $\pi: X_1 - Y_1 \rightarrow X - Y$ が双正則となるようなものが存在する. (F, ∇) を $X_1 - Y_1$ 上の接続とみなすと, 定理 6.2 より局所自由 $\mathcal{O}_{X_1}$ 加群としての F の拡張 G で ∇ が G に関して対数型の極を持つようなものが存在する. Grauert の定理より, このとき順像 $\pi_* G$ は F の接続 $\mathcal{O}_X$ 加群としての拡張となっている. そこで $\tilde{F} = \mathcal{O}_X[Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \pi_* G$ とおけば, $\tilde{F}$ は効果的で ∇ は $\tilde{F}$ 上の有理型接続に拡張される. 後は $(\tilde{F}, \nabla)$ が確定特異点型である事を示せばよい.

D を円盤, $u: D \rightarrow X$ を射で $u^{-1}(Y) = \{0\}$ となるものとする. すると π は固有であるから, 射 $v: D \rightarrow X_1$ で $\pi \circ v = u$ を満たすものが存在する. そこで $\tilde{G} = \mathcal{O}_{X_1}[Y_1] \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} G$ とおく. ∇ は G に関して対数型の極を

持つため $v^*(\tilde{G}, \nabla)$ は確定特異点型である．一方自然な射 $\pi^*\pi_*G \rightarrow G$ は Y_1 の外で同型であるから，命題 4.3 よりこれは同型 $\pi^*\tilde{F} \rightarrow \tilde{G}$ を導く．故に $u^*(\tilde{F}, \nabla) = v^*(\tilde{G}, \nabla)$ であり， $u^*(\tilde{F}, \nabla)$ が確定特異点型である事が従う． $\square$

注意 7.5. 上の証明の議論から，定理 7.3 の (i) から (ii) が導かれる事が分かる (証明の要は $\pi_*\tilde{F}$ の接続性であり，これは $\tilde{F}$ が効果的である事と Grauert の定理から従う)．

残りの証明は次の補題からの帰結である．

補題 7.6. 定理 7.2 の仮定の下で，全ての水平切断 $f \in \Gamma(X - Y, \tilde{F}^\nabla)$ は有理型，すなわち $\tilde{F}$ の大域切断である．

$f \in \Gamma(X - Y, \tilde{F}^\nabla)$ とする．定理 1.6 より任意の $y \in U$ に対し $v^*f|_{\{y\} \times D}$ は有理型である．従って，上の補題を示すには次の主張を示せば十分である．

主張 7.7. $f \in \Gamma(X - Y, \tilde{F}^\nabla)$ とし，任意の $y \in U$ に対し $v^*f|_{\{y\} \times D}$ は有理型であるとする．すると f は有理型である．

命題 4.4 より $\tilde{F}$ は反射的であるから， f が点 $b \in Y$ において有理型である事を示すには任意の $g \in \tilde{F}_b^\vee$ に対し $\langle f, g \rangle$ が有理型である事を示せば十分である．従って上の主張は $\tilde{F} = \mathcal{O}_X[Y]$ の場合に帰着される．この場合の証明を次の 3 段階に分けて証明する：

- (i) f は U 上有理型である．
- (ii) f は Y_{reg} 上有理型である．
- (iii) f は Y 上有理型である．

■(i) の証明． $b \in U$ とする． b を原点とする局所座標系 $x_1, \dots, x_n$ を取って Y が局所的に $x_1 = 0$ と表されるようにする． f が有理型である事を示すため，半径が十分小さい b 中心の多重円盤 V において f を次のように Laurent 展開する：

$$f = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_p(x_2, \dots, x_n) x_1^p.$$

仮定より， $(x_2, \dots, x_n)$ を固定したとき h は x_1 について有理型関数である．従って任意の $(x_2, \dots, x_n) \in V \cap Y$ に対しある q が存在して $h_p(x_2, \dots, x_n) = 0$ が任意の $p \leq q$ で成り立つ．そこで

$$W_q = \{ (x_2, \dots, x_n) \in V \cap Y \mid h_p(x_2, \dots, x_n) = 0 \ (p \leq q) \}$$

とおくと，これは $V \cap Y$ の閉集合であり，今述べた事から $\bigcup_q W_q = V \cap Y$ となる．故に Baire の定理よりある W_{q_0} は内点を持つが，解析接続によりそれは $W_{q_0} = V \cap Y$ を意味する．従って f は有理型である．

■(ii) の証明． $U' \subset Y_{\text{reg}}$ を f がそこで有理型であるような点全体とする．すると U' は明らかに開集合であり，また (i) 及び仮定より Y_{reg} の全ての連結成分と交わる．故に後は U' が閉集合である事を示せばよい．これは (i) と同様の解析接続の議論から従う．

■(iii) の証明． $b \in Y - Y_{\text{reg}}$ とすると， f は b の近傍内の余次元 2 以上の部分を除いて有理型である．従って Hartog の定理より f は b においても有理型である．

以上で主張 7.7 及び補題 7.6 が示された．

定理 7.1 の証明．定理の関手が本質的全射である事は既に示した．そこでこれが充満忠実である事を示す．この主張を示すには， $(\tilde{F}, \nabla), (\tilde{G}, \nabla)$ を確定特異点型有理型接続とし，射 $(\tilde{F}, \nabla)|_{X-Y} \rightarrow (\tilde{G}, \nabla)|_{X-Y}$ が与えら

れているとき、この射が X 上の射に拡張される事を示せばよい (一意性は明らかである). これは任意の切断 $f \in \Gamma(X - Y, \mathcal{H}om(\tilde{F}, \tilde{G})^\nabla)$ が $\Gamma(X, \mathcal{H}om(\tilde{F}, \tilde{G})^\nabla)$ の元に拡張される事と同値であり、故に命題 5.2 の (ii) と補題 7.6 から従う. $\square$

定理 7.2, 7.3 の証明. 定理 7.2 の仮定を満たす $(\tilde{F}, \nabla)$ を取り, $(\tilde{G}, \nabla)$ を補題 7.4 によって与えられる $(\tilde{F}, \nabla)|_{X-Y}$ の確定特異点型有理型接続としての拡張とする. $(\tilde{F}, \nabla)$ と $(\tilde{G}, \nabla)$ は $X - Y$ 上で同型である. その同型射が与える $\Gamma(X - Y, \mathcal{H}om(\tilde{F}, \tilde{G})^\nabla)$ の元を f とする. $\tilde{G}$ は確定特異点型であるから特に定理 7.2 の仮定を満たし、故に命題 5.2 の (ii) より $\mathcal{H}om(\tilde{F}, \tilde{G})$ も同じ性質を持つ. よって補題 7.6 より, f は有理型, すなわち $\mathcal{H}om(\tilde{F}, \tilde{G})$ の大域切断に拡張される. 同様に f^{-1} も拡張される. 故に f は $(\tilde{F}, \nabla)$ と $(\tilde{G}, \nabla)$ の間の同型射を与える. 従って $(\tilde{F}, \nabla)$ は確定特異点型である. 以上で定理 7.2 が示された.

更に $\tilde{G}$ は効果的である故, $\tilde{F}$ もまた効果的である. これで定理 7.3 の (i) が示された. また注意 7.5 で述べた通り (ii) は (i) から従う. 以上で定理 7.3 が示された. $\square$

注意 7.8. Y は正規交叉因子であると仮定する. X 上のベクトル場のなす層 Θ_X の部分層 $\Theta_{X,Y}$ を

$$\Theta_{X,Y} = \{\theta \in \Theta_X \mid \theta\mathcal{I} \subset \mathcal{I}\}$$

で定める. ただし $\mathcal{I}$ は Y の定義イデアルである. このとき X 上の Y に沿った有理型接続 (E, ∇) に対し次の条件は同値となる:

- (i) E は確定特異点型である.
- (ii) E は $\Theta_{X,Y}$ の作用で不変な接続 $\mathcal{O}_X$ 部分加群の和で表される.

証明. (i) $\implies$ (ii). 定理 7.1 及び定理 6.2 より, $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ の各切断 τ に対し E の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 部分加群 G_τ が一意的に存在し, ∇ は G_τ に関して対数型の極を持ちその留数の固有値は τ の像に属す. このとき $E = \bigcup_\tau G_\tau$ となる事を容易に示す事ができる. G_τ は $\Theta_{X,Y}$ の作用で不変であるから結果が従う.

(ii) $\implies$ (i). 定理 7.2 より $\dim X = 1$ の場合に示せばよいが, この場合は確定特異点の定義から従う. $\square$

8. 比較定理

前節と同様 X を複素多様体, Y を X の因子とし,

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ j \nearrow & & \nwarrow i \\ X - Y & & Y \end{array}$$

をそれぞれ自然な包含射とする. X 上の Y に沿った確定特異点型有理型接続 $(\tilde{F}, \nabla)$ に対し, その **de Rham 複体** $\mathrm{DR} \tilde{F}$ を

$$\mathrm{DR} \tilde{F} = (\Omega_X^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{F}, \nabla)$$

で定める.

定理 8.1 (Grothendieck-Deligne). $D^b(\mathbb{C}_X)$ における自然な射

$$\mathrm{DR} \tilde{F} \rightarrow \mathbb{R}j_* j^* \mathrm{DR} \tilde{F} \quad (8.1)$$

は同型である.

証明を与える前に主張に関して追記しておく.

注意 8.2. 複体 $j^* \mathrm{DR} \tilde{F} = \mathrm{DR} j^* \tilde{F}$ は $\tilde{F}|_{X-Y} = F$ の de Rham 複体に他ならない. Poincaré の補題よりこのコホモロジー層は $V = F^\nabla$ であり, 故に $\mathrm{D}^b(X-Y, \mathbb{C}_{X-Y})$ において $j^* \mathrm{DR} \tilde{F} = V$ が成立する. よって

$$\mathbb{H}^*(X, \mathbb{R} j_* j^* \mathrm{DR} \tilde{F}) = R^* \Gamma(\mathbb{R} j_* V) = H^* \circ \mathbb{R}(\Gamma \circ j_*)(V) = H^*(X-Y, V)$$

となる. 従って定理は自然な同型

$$\mathbb{H}^*(X, \mathrm{DR} \tilde{F}) \xrightarrow{\sim} H^*(X-Y, V) \quad (8.2)$$

が存在する事を示している. 特に $\tilde{F} = \mathcal{O}_X[Y]$, $\nabla = d$ とおけば, Grothendieck の結果

$$\mathbb{H}^*(X, \mathrm{DR} \mathcal{O}_X[Y]) = H^*(X-Y, \mathbb{C})$$

を得る.

$\mathbb{H}^0(X, \mathrm{DR} \tilde{F}) = H^0(X, \tilde{F}^\nabla)$ であるから, (8.2) は次数 0 に限れば補題 7.6 から得られる事に注意する.

注意 8.3. $\Omega_{X-Y}^p \otimes_{\mathcal{O}_{X-Y}} F$ は j_* に関し非輪状である. 実際, 点 $a \in Y$ 及びその近傍 U で Stein であるようなものを取ると, $U-Y$ もまた Stein であるから, 任意の $q \neq 0$ で

$$H^q(U-Y, \Omega_{X-Y}^p \otimes_{\mathcal{O}_{X-Y}} F) = 0$$

となる. 故に Stein 近傍からなる基本系を取る事で $R^q j_*(\Omega_{X-Y}^p \otimes_{\mathcal{O}_{X-Y}} F)_a = 0$ ($q \neq 0$) が得られる.

一般論により, この事実から $\mathrm{D}^b(X, \mathbb{C}_X)$ において

$$\begin{aligned} \mathbb{R} j_* j^* \mathrm{DR} \tilde{F} &= \mathbb{R} j_*(\Omega_{X-Y}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{X-Y}} F, \nabla) \\ &\simeq (j_*(\Omega_{X-Y}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{X-Y}} F), \nabla) = (\Omega_X^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} j_* j^* \tilde{F}, \nabla) \\ &= \mathrm{DR}(j_* j^* \tilde{F}) \end{aligned}$$

が成り立つ事が従う. 射 (8.1) に対応する射 $\mathrm{DR} \tilde{F} \rightarrow \mathrm{DR}(j_* j^* \tilde{F})$ は自然な射 $\tilde{F} \rightarrow j_* j^* \tilde{F}$ に DR を施して得られるものに他ならない.

■定理 8.1 の証明. 定理の証明に入る. まず Y が正規交叉因子の場合に主張が帰着される事を示す. 広中の特異点解消定理により, 複素多様体 X_1 及び固有射 $\pi: X_1 \rightarrow X$ で, $\pi^{-1}(Y) = Y_1$ が正規交叉因子, かつ $\pi: X_1 - Y_1 \rightarrow X - Y$ が双正則であるようなものが存在する. $(\tilde{F}_1, \nabla) = \pi^*(\tilde{F}, \nabla)$ とおく. これは命題 5.2 より確定特異点型である.

補題 8.4. (F_1, ∇) に対し定理の主張が正しいならば, (F, ∇) に対しても正しい.

証明.

$$\begin{array}{ccc} & X_1 & \\ j_1 \nearrow & & \nwarrow i_1 \\ X_1 - Y_1 & & Y_1 \end{array}$$

をそれぞれ自然な包含射とする. 仮定より $\mathrm{D}^b(X_1, \mathbb{C}_X)$ において自然な射

$$\mathrm{DR} \tilde{F}_1 \rightarrow \mathbb{R}(j_1)_* j_1^* \mathrm{DR} \tilde{F}_1$$

は同型である. これに $\mathbb{R}\pi_*$ を適用すると,

$$\mathbb{R}\pi_* \mathrm{DR} \tilde{F}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\pi_* \mathbb{R}(j_1)_* j_1^* \mathrm{DR} \tilde{F}_1$$

が得られる. ここで $X-Y$ と $X_1 - Y_1$ を π によって同一視すると,

$$\mathbb{R}\pi_* \mathbb{R}(j_1)_* = \mathbb{R}j_*, \quad j_1^* \mathrm{DR} \tilde{F}_1 = j^* \mathrm{DR} \tilde{F}$$

であるから,

$$\mathbb{R}\pi_*\mathbb{R}(j_1)_*j_1^*\mathrm{DR}\tilde{F}_1 = \mathbb{R}j_*j^*\mathrm{DR}\tilde{F}$$

となる. 従って $\mathbb{R}\pi_*\mathrm{DR}\tilde{F}_1$ が $\mathrm{DR}\tilde{F}$ と同一視できる事を示せばよい.

まず自然な射 $\pi^*(\Omega_X^p \otimes \tilde{F}) \rightarrow \Omega_{X_1}^p \otimes \tilde{F}_1$ は同型である. 実際, 両者は連接 $\mathcal{O}_{X_1}[Y_1]$ 加群で $X_1 - Y_1$ 上で一致する. また $\Omega_X^p \otimes \tilde{F}$ は効果的であるから Grauert の定理より $R^q\pi_*\pi^*(\Omega_X^p \otimes \tilde{F})$ は連接である. 任意の $q \neq 0$ に対しこれは Y の外で 0 となるため, 連接性から全体で 0 となる. よって $\mathbb{R}\pi_*\mathrm{DR}\tilde{F}_1$ は $(\pi_*\pi^*(\Omega_X^\bullet \otimes \tilde{F}), \nabla)$ と同型である. 自然な射 $\Omega_X^p \otimes \tilde{F} \rightarrow \pi_*\pi^*(\Omega_X^\bullet \otimes \tilde{F})$ は Y の外で同型であるから全体で同型であり, 故に $\mathbb{R}\pi_*\mathrm{DR}\tilde{F}_1 \simeq \mathrm{DR}\tilde{F}$ となる. 射の両立性に関する議論は省略する. $\square$

上の補題より Y が正規交叉因子である場合に定理を証明すればよい. 主張は局所的であるから, X は $\mathbb{C}^n$ の原点における芽, Y は $x_1 \cdots x_p = 0$ ($1 \leq p \leq n$) と仮定してよい. また $\tilde{F}$ は確定特異点型有理型接続のなす圏の対象として単純であるとしてよい. そこで

$$\tilde{F} = \mathcal{O}_X[Y], \quad \omega = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{dx_i}{x_i}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq \mathrm{Re} \lambda_i < 1$$

とする.

$$\nabla_i = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\lambda_i}{x_i} & (i = 1, \dots, p), \\ \frac{\partial}{\partial x_i} & (i = p+1, \dots, n) \end{cases}$$

とおけば, de Rham 複体 $\mathrm{DR}\tilde{F}$ の原点における芽は Koszul 複体

$$K(\nabla_1, \dots, \nabla_n; \mathcal{O}_X[Y]_0)$$

に他ならない. 簡単のため

$$A = \mathcal{O}_X[Y]_0, \quad B = (j_*j^*\mathcal{O}_X)_0$$

とおく事にする. 次の主張を示せば結果が従う.

主張 8.5. 自然な射

$$K(\nabla_1, \dots, \nabla_n; A) \rightarrow K(\nabla_1, \dots, \nabla_n; B)$$

は擬同型である.

証明. 射の左側の複体は 2 重複体 $K(\nabla_2, \dots, \nabla_n; A \xrightarrow{\nabla_1} A)$ の単複体化と同一視でき, また右側も同様の表示を持つ. そこで次の自然な射を考える:

$$[A \xrightarrow{\nabla_1} A] \longrightarrow [B \xrightarrow{\nabla_1} B]. \quad (8.3)$$

$f \in A$ を Laurent 展開し

$$f = \sum f_k(x_2, \dots, x_n)x_1^k$$

とする. ここで

$$X' = \{x_1 = 0\} \subset X, \quad Y' = \{x_2 \cdots x_p = 0\} \subset X'$$

とおけば, f_k の住処は $A' = \mathcal{O}_{X'}[Y']_0$ で与えられる ($\{f_k\}$ には然るべき収束条件が要請される). この f に ∇_1 を施すと

$$\nabla_1 f = \sum (k + \lambda_1) f_k x_1^{k-1}$$

となる. 従って $\lambda_1 \neq 0$ の場合 $\nabla_1: A \rightarrow A$ は同型であり, これは A を B に取り替えても正しい. 故に複体 $[A \xrightarrow{\nabla_1} A], [B \xrightarrow{\nabla_1} B]$ のコホモロジーは両者とも全て 0 であり, 従って射 (8.3) は擬同型である. これから主

張が従う． $\lambda_1 = 0$ の場合， $\nabla_1: A \rightarrow A$ の核，余核はどちらも A' に同型であり，複体 $[A \xrightarrow{\nabla_1} A]$ は $[A' \xrightarrow{0} A']$ に擬同型となる．また $B' = B = (j_* j^* \mathcal{O}_{X'})_0$ とおけば ($j: X' \rightarrow Y'$ は包含射)，同様の議論により $[B \xrightarrow{\nabla_1} B]$ は $[B' \xrightarrow{0} B']$ に擬同型となる．故に主張を示すには自然な射

$$K(0, \nabla_2, \dots, \nabla_n; A') \rightarrow K(0, \nabla_2, \dots, \nabla_n; B')$$

が擬同型である事を示せばよい．この議論を $\nabla_2, \nabla_3, \dots$ について繰り返していけば，結果が得られる． $\square$

9. 代数的な場合

9.1. 確定特異点型接続の定義

X を $\mathbb{C}$ 上有限型の非特異代数多様体とし， (F, ∇) を X 上の可積分接続とする． $X^{\text{an}}, F^{\text{an}}$ 等によって，対応する複素解析の対象を表す事にする． (F, ∇) が確定特異点型である事の定義を与えよう．

開埋め込み $j: X \rightarrow \bar{X}$ で次の条件を満足するものを X の**射影因子完備化**と呼ぶ事にする：

- (i) $\bar{X}$ は非特異射影代数多様体で，
- (ii) $\bar{X} - j(X)$ は $\bar{X}$ の因子である．

射影因子完備化は少なくとも X がアフィンであれば存在する (広中の定理)．このとき $(j_* F)^{\text{an}}$ は $\bar{X}^{\text{an}}$ 上の Y^{an} に沿った有理型接続である．

定義 9.1. X 上の可積分接続 (F, ∇) が**確定特異点型**であるとは， X の任意のアフィン開部分集合 U とその任意の射影因子完備化 $j: U \rightarrow \bar{U}$ に対し， $(j_*(F|_U))^{\text{an}}$ が確定特異点型である事をいう．

上の定義に関しいくつか注意をする．

注意 9.2. (i) もし X 全体の射影因子完備化 $j: X \rightarrow \bar{X}$ が存在し， $(j_* F)^{\text{an}}$ が確定特異点型であれば，他の任意の射影因子完備化 $j': X \rightarrow \bar{X}'$ に対しても $(j'_* F)^{\text{an}}$ は確定特異点型である．実際，その場合は更に別の射影因子完備化 $j'': X \rightarrow \bar{X}''$ 及び可換図式

$$\begin{array}{ccc} & \bar{X} & \\ j \nearrow & & \nwarrow k \\ X & \xrightarrow{j''} & \bar{X}'' \\ j' \searrow & & \swarrow k' \\ & \bar{X}' & \end{array}$$

が存在する ($\bar{X}''$ として， X の $\bar{X} \times \bar{X}'$ における閉包の適当な非特異化を取ればよい)．故に命題 5.2 の (iii) 及び定理 7.3 の (ii) より主張が従う．

(ii) 定義におけるアフィン開集合 U に対する条件は貼り合わせ可能である．従って X のあるアフィン開被覆 $\{U_i\}$ が存在して各 U_i が定義における U と同じ条件を満足すれば， (F, ∇) は確定特異点型である．

次の命題は，代数的な場合も定義 5.1 と同様の条件で確定特異点型接続の定義を与える事ができる事を示している．

命題 9.3. X 上の可積分接続 (F, ∇) に対し次の 2 条件は同値である：

- (i) (F, ∇) は確定特異点型である．

(ii) 任意の非特異代数曲線 C からの任意の射 $u: C \rightarrow X$ に対し, $u^*(F, \nabla)$ は確定特異点型である.

証明. (i) $\implies$ (ii) は明らかである. (ii) $\implies$ (i) では X がアファインであると仮定してよく, このとき X の射影因子完備化 $j: X \rightarrow \overline{X}$ を取って定理 7.2 を適用すれば結果が従う (写像 $v|_{\{y\} \times D}$ が非特異代数曲線からの射の制限になるように v を選ばばよい). $\square$

9.2. 主定理

定理 9.4. [代数的な場合の Riemann-Hilbert 対応] 関手 $(F, \nabla) \mapsto (F^{\text{an}}, \nabla)$ は X 上の確定特異点型接続のなす圏と X^{an} 上の可積分接続のなす圏の間の同値を与える.

定理 3.1 より, この定理は X^{an} 上の局所系の代数的な記述を与える.

証明. 定理の主張は Zariski 位相に関して局所的である. 従って X はアファインであると仮定してよい. そこで X の射影因子完備化 $j: X \rightarrow \overline{X}$ を取る. 全ての接続 $j_*\mathcal{O}_X$ 加群は効果的, すなわち接続 $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ 部分加群によって生成され, 接続 $j_*\mathcal{O}_X$ 加群のなす圏と接続 $\mathcal{O}_X$ 加群のなす圏は自然に同値である. 故に GAGA より, X 上のベクトル束のなす圏と効果的接続 $\mathcal{O}_{\overline{X}^{\text{an}}}[\mathcal{Y}^{\text{an}}]$ 加群で X^{an} 上に制限すると局所自由となるようなもののなす圏は同値である. またこの圏同値により双方の上の接続の概念が対応する事は 3 節と同様にして分かる. よって定理 7.1 及び定理 7.3 の (i) より主張が従う. $\square$

可積分接続 (F, ∇) の de Rham 複体は解析的な場合と同様にして定義される. また $D^b(\mathbb{C}_X)$ において, 自然な射

$$\mathbb{H}^*(X, \text{DR } F) \rightarrow \mathbb{H}^*(X^{\text{an}}, \text{DR } F^{\text{an}})$$

が次のようにして定まる: X の Zariski 開被覆 $\{U_i\}$ を取る. $I = (i_0, \dots, i_p)$ に対し $U_I = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ とおくと, $\Omega_X^q \otimes_{\mathcal{O}_X} F$ は $\Gamma(U_I, \cdot)$ に関し非輪状であるから, $\mathbb{H}^*(X, \text{DR } F)$ は $D^b(\mathbb{C}_X)$ において 2 重複体 $(\Gamma(U_I, \Omega_X^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} F), (\nabla, \delta))$ の単複体化と同型である (ただし δ は Čech 微分). 同様に, U_I^{an} は Stein であるから, $\mathbb{H}^*(X^{\text{an}}, \text{DR } F^{\text{an}})$ も先程と同様の 2 重複体の単複体化と同型である. このとき射は $\Gamma(U_I, \Omega_X^q \otimes_{\mathcal{O}_X} F) \rightarrow \Gamma(U_I^{\text{an}}, \Omega_{X^{\text{an}}}^q \otimes_{\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}} F^{\text{an}})$ で与えられる. この定義は被覆の取り方に依らない.

定理 9.5. 確定特異点型接続 (F, ∇) に対し, 自然な射 $\mathbb{H}^*(X, \text{DR } F) \rightarrow \mathbb{H}^*(X^{\text{an}}, \text{DR } F^{\text{an}})$ は同型である.

証明. X がアファインの場合に主張を証明すれば, 一般の場合の主張も先程の 2 重複体の間の射が微分 ∇ に関して擬同型となるため従う.

X がアファインであれば, 射影因子完備化 $j: X \rightarrow \overline{X}$ が存在する. このとき

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^*(X, \text{DR } F) &= \mathbb{H}^*(\overline{X}, \mathbb{R}j_* \text{DR } F) \\ &= \mathbb{H}^*(\overline{X}, \text{DR } j_* F) \quad (\text{注意 8.3 と同様}) \\ &= \mathbb{H}^*(\overline{X}^{\text{an}}, \text{DR } (j_* F)^{\text{an}}) \quad (\text{GAGA}) \\ &= \mathbb{H}^*(X^{\text{an}}, \text{DR } F^{\text{an}}) \quad (\text{定理 8.1}) \end{aligned}$$

となり, 主張が示された. $\square$

例 9.6 (Grothendieck). (F, ∇) として $(\mathcal{O}_X, d)$ を取れば次を得る:

$$\mathbb{H}^*(X, (\Omega, d)) = H^*(X, \mathbb{C}).$$

しかしながらよく知られているように, 一般に (Ω_X, d) は Poincaré の補題を満たさない. 実際, 一般には $H^*(X, \mathbb{C}) \neq H^*(X^{\text{an}}, \mathbb{C})$ である.