

有理関数を係数とする線型常微分方程式の Fourier-Laplace 変換とその応用

Fourier-Laplace transform for linear ordinary differential equations with rational coefficients
and its application

山川 大亮 (神戸大・理)

本講演では、行列値有理関数を係数行列とする 1 階連立線型常微分方程式

$$\partial_x \mathbf{u} = A(x)\mathbf{u}, \quad \partial_x = d/dx \quad (1)$$

の Fourier-Laplace 変換に関し講演者が最近行った研究 [9] について紹介する。

複素領域上の線型常微分方程式の理論において、Fourier-Laplace 変換は基本的な道具として古くから用いられている。そのよく知られている例の一つとして、次のような対応がある：

$$(x-T)\partial_x \mathbf{u} = A\mathbf{u} \longmapsto \partial_y \mathbf{v} = -\left(T + \frac{A+1}{y}\right)\mathbf{v}. \quad (2)$$

ここで T, A は定数行列である。 $\mathbf{v}(y) = \int \mathbf{u}(x)e^{-xy}dx$ において形式的な計算をすれば、 $\mathbf{u}$ が左側の微分方程式 (大久保型方程式と呼ぶ [5]) を満足する時 $\mathbf{v}$ は右側の微分方程式を満足する。別の言い方をすれば、微分作用素 $(x-T)\partial_x - A$ において $x \mapsto -\partial_y$, $\partial_x \mapsto y$ と形式的な置き換えを行うと、作用素 $-(y\partial_y + yT + A + 1)$ が得られる。この意味で、対応 (2) は一種の (Fourier-)Laplace 変換である。

一般の 1 階連立線型常微分方程式 (1) 全体に働く閉じた変換としてこのような Fourier-Laplace 型の変換を定式化しようとする、その具体的な記述は複雑なものになる。しかし $A(x)dx$ の $x = \infty$ における極の位数が高々 2 の場合 (以後これを (1) に対し仮定する)、Harnad [3], Sanguinetti-Woodhouse [7] による次のような美しい記述が知られている。

方程式 (1) の未知関数 $\mathbf{u}$ が値を取る複素ベクトル空間を U とする (従って $A(x)$ は $\text{End}(U)$ に値を取る)。この時あるベクトル空間 V と 4 つの線型写像

$$S: U \rightarrow U, \quad T: V \rightarrow V, \quad P: U \rightarrow V, \quad Q: V \rightarrow U$$

が存在し、 $A(x)$ を次のように表す事ができる [8]：

$$A(x) = S + Q(x-T)^{-1}P. \quad (3)$$

すると、方程式 (1) において $\mathbf{v} = (x-T)^{-1}P\mathbf{u}$ とおく事で次の連立方程式が得られる：

$$\begin{pmatrix} \partial_x - S & -Q \\ P & -(x-T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

逆に (4) において $\mathbf{v}$ を消去すれば (1) が得られる。(4) に書き換える利点は、この方程式において $(x, \partial_x) \mapsto (-\partial_y, y)$ と置き換えを行い、その後 $\mathbf{u}$ を消去する事で容易に次の 1 階連立型が得られる点にある：

$$\partial_y \mathbf{v} = B(y)\mathbf{v}, \quad B(y) = -T - P(y-S)^{-1}Q. \quad (5)$$

構成の仕方から、これは (1) の一種の Fourier-Laplace 変換と呼べるものである。

しかし、このままでは (1) から (5) への対応は well-defined でない。何故なら関係式 (3) を満たすベクトル空間 V と線型写像 Q, P, T の取り方には任意性があるためである。Woodhouse [8] はこれらのデータを具体的に一組与える事で任意性を消しているが、その方法では一般の場合に方程式の「既約性」が保たれない (この問題は対応 (2) でも同じである)。これを解決するため、講演者は次を証明した：

定理 1 ([9]). 与えられた方程式 (1) に対し, 関係式 (3) を満たすデータ $(V; S, T, Q, P)$ の中で $\dim V$ が最小のものが本質的に唯一つ存在する. 更に (1) からそのようなデータへの対応を (線型代数の言葉のみで) 具体的に構成する事ができる.

上の定理における「本質的に唯一つ」の意味は次の通りである: もし 2 組のデータ $(V; S, T, Q, P)$, $(V'; S', T', Q', P')$ が定理の条件を満足した場合, 線型同型 $f: V \rightarrow V'$ が存在して次が成立する:

$$S = S', \quad Q = Q' \circ f, \quad f \circ P = P', \quad f \circ T = T' \circ f.$$

なお, この定理は純粋に代数的な方法で証明する事もできるが, [9] では Mumford の幾何学的不変式論 [6] を用いて証明している.

定理 1 により得られる (1) から (5) への well-defined な対応を (一般化された) Harnad 双対 [3] と呼ぶ. 幾何学的不変式論から Harnad 双対が方程式の既約性を保つ事が分かり, 更に次が得られる:

定理 2 ([9]). 特異点の周りで局所的にある generic な条件を満たす既約 rigid な方程式 (1) は, Harnad 双対, 及び未知函数にスカラー函数を掛ける操作を有限回繰り返す事により, 1 階単独の自明な方程式に帰着される.

ここで rigid な方程式とは, 大雑把に言えば各特異点の周りの形式基本解の構造から方程式の大域的な構造が決まってしまうようなものの事である. このタイプの主張は方程式 (1) が確定特異点のみを持つ場合に Katz [4] によって証明され, 一般の場合に Deligne, Arinkin [1] によって独立に証明された. 定理 2 は generic な場合に彼らの結果の Harnad 双対を用いた別証明を与えている.

なお, 一度 Harnad 双対を施した後, 未知函数に冪函数を掛ける操作 $v(y) \mapsto y^\lambda v(y)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) を行い Harnad 双対で戻す事で, 非自明な方程式の変換が得られる. これは additive middle convolution [2] と呼ばれるものの自然な一般化を与える.

講演では, 時間に余裕があれば Harnad 双対の $\mathcal{D}$ 加群的解釈や, これらの結果に関連した他の話題 (表現論との関係等) についても触れたい.

参考文献

- [1] D. Arinkin, *Rigid irregular connections on $\mathbb{P}^1$* , Compos. Math. **146** (2010), no. 5, 1323–1338.
- [2] M. Dettweiler and S. Reiter, *An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem*, J. Symbolic Comput. **30** (2000), no. 6, 761–798.
- [3] J. Harnad, *Dual isomonodromic deformations and moment maps to loop algebras*, Comm. Math. Phys. **166** (1994), no. 2, 337–365.
- [4] N. M. Katz, *Rigid local systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 139, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [5] H. Kawakami, *Generalized Okubo systems and the middle convolution*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no. 17, 3394–3421.
- [6] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, third ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [7] G. Sanguinetti and N. M. J. Woodhouse, *The geometry of dual isomonodromic deformations*, J. Geom. Phys. **52** (2004), no. 1, 44–56.
- [8] N. M. J. Woodhouse, *Duality for the general isomonodromy problem*, J. Geom. Phys. **57** (2007), no. 4, 1147–1170.
- [9] D. Yamakawa, *Middle convolution and Harnad duality*, Math. Ann. **349** (2011), no. 1, 215–262.