

群値運動量写像を用いた^{えびら}簾多様体の変種と Riemann-Hilbert 対応

山川 大亮
京都大学 数学教室

Multiplicative Quiver Varieties and Riemann-Hilbert Correspondence

Daisuke Yamakawa
Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University

本講演では Crawley-Boevey–Shaw [CBS06] 及び講演者 [Y07] によって導入された乗法的簾多様体と簾多様体の関係, 及び $\mathbb{P}^1$ 上の放物接続のモジュライ空間が乗法的簾多様体の重要な例として与えられるという結果を紹介する. また時間に余裕があれば, 簾多様体の理論でよく知られている鏡映関手に相当するものが乗法的簾多様体の方でも存在する事を紹介したい.

1 運動量写像と群値運動量写像

この節では Alekseev-Malkin-Meinrenken [AMM98] によって導入された群値運動量写像の概念を紹介する. 乗法的簾多様体はこの概念を用いて定義される.

1.1 運動量写像

まず運動量写像の概念をここで簡単に復習しておく.

M を複素多様体, ω を M 上の正則シンプレクティック形式 (すなわち正則な 2 次微分形式で各点で非退化なもの) とする. また複素 Lie 群 G が M 上に ω を保つよう正則に作用しているとする. このとき正則写像 $\mu: M \rightarrow (\mathrm{Lie} G)^*$ が運動量写像であるとは, 次の 2 条件を満足する事をいう:

- (1) 余随伴作用 (随伴作用から誘導される $(\mathrm{Lie} G)^*$ 上の G 作用) に関し μ は G 同変写像である;
- (2) 任意の $\xi \in \mathrm{Lie} G$ に対し $d\langle \mu, \xi \rangle = \iota(\xi_M)\omega$ が成り立つ.

ここで ι は内部積を表し, ξ_M は次式で定まる M 上の正則ベクトル場である:

$$\xi_M(x) := \left. \frac{d}{dt} \exp(t\xi)x \right|_{t=0}.$$

以下, 群作用付きの正則シンプレクティック多様体 (M, ω) と運動量写像 $\mu: M \rightarrow (\mathrm{Lie} G)^*$ の組 (M, ω, μ) を Hamilton G 空間と呼ぶ事にする.

運動量写像の持つ性質として最も有名なものは次の定理である:

定理 1.1. (M, ω, μ) を Hamilton G 空間とし, $\zeta \in (\text{Lie } G)^*$ を余随伴作用で不変な元とする. この時もし $\mu^{-1}(\zeta)$ 上の G の作用が自由ならば, $\mu^{-1}(\zeta)$ は M の複素部分多様体である. もし更に商空間 $\mu^{-1}(\zeta)/G$ に自然に多様体の構造が入るならば, ω は商多様体 $\mu^{-1}(\zeta)/G$ 上の正則シンプレクティック形式を誘導する.

シンプレクティック多様体 $\mu^{-1}(\zeta)/G$ を M のシンプレクティック商と呼ぶ.

1.2 群値運動量写像

Alekseev-Malkin-Meinrenken によって導入された乗法的 Hamilton 構造及び群値運動量写像の概念は, 安直に言えば Hamilton 構造, 運動量写像を「乗法化」したものである.

G を複素 Lie 群とし, $(\ , \)$ を $\text{Lie } G$ 上の不変非退化対称双線型形式とする.

G 上の 3 次微分形式 χ を次式で定義する:

$$\chi := \frac{1}{12}([g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg] \wedge g^{-1}dg) = \frac{1}{12}([dg g^{-1} \wedge dg g^{-1}] \wedge dg g^{-1}).$$

ここで $g^{-1}dg$ (resp. $dg g^{-1}$) は G 上の左不変 (resp. 右不変) Maurer-Cartan 形式である.

定義 1.2. 乗法的 Hamilton G 空間 (quasi-Hamiltonian G -space) とは, G が正則に作用している複素多様体 M と, その上の G 不変な正則 2 次微分形式 ϖ , 及び G 同変な正則写像 $\Phi: M \rightarrow G$ (行き先の G には共役で作用させている) で次を満たすものをいう:

$$(QH1) \ d\varpi = -\Phi^*\chi;$$

$$(QH2) \ \iota(\xi_M)\varpi = \frac{1}{2}(\xi, \Phi^{-1}d\Phi + d\Phi\Phi^{-1}) \quad (\xi \in \text{Lie } G);$$

$$(QH3) \ \text{Ker } \varpi_x = \{ \xi_M(x) \mid \xi \in \text{Ker}(\text{Ad}_{\Phi(x)} + 1) \} \quad (x \in M).$$

ただし $\text{Ker } \omega_x = \{ v \in T_x M \mid \omega_x(v, w) = 0 \ (w \in T_x M) \}$ とおいた. Φ を群値運動量写像と呼ぶ.

上の定義から分かるように, 乗法的 Hamilton 構造の 1 部である 2 次微分形式 ϖ は一般に閉形式でも非退化でもない. しかし Hamilton 構造の場合と同じく次の定理が成り立つ.

定理 1.3 (cf. [AMM98, Theorem 5.1]). (M, ϖ, Φ) を乗法的 Hamilton G 空間とし, f を G の中心に属す元とする. この時もし $\Phi^{-1}(f)$ 上の G 作用が自由ならば, $\Phi^{-1}(f)$ は M の複素部分多様体である. もし更に商空間 $\Phi^{-1}(f)/G$ に自然に多様体の構造が入るならば, ϖ は $\Phi^{-1}(f)/G$ 上のシンプレクティック形式を誘導する.

2 籠多様体と乗法的籠多様体

2.1 籠

籠 (「えびら」と読む) とは次の図にあるような, いくつかの点とそれらを結ぶ矢からなる図式の事をいう.



籠が与えられたとき、頂点の集合を I , 矢の集合を Ω と書き、矢の始点を与える写像を $\text{out}: \Omega \rightarrow I$, 終点を与える写像を $\text{in}: \Omega \rightarrow I$ と表す事にする。以後、 I 及び Ω は有限集合と仮定する。

籠 (I, Ω) の ($\mathbb{C}$ 上の) 表現とは、 I を添え字集合とする族 $V = (V_i)_{i \in I}$ と Ω を添え字集合とする族 $x = (x_h)_{h \in \Omega}$ の組であって、

- 各 $i \in I$ に対し V_i は $\mathbb{C}$ ベクトル空間；
- 各 $h \in \Omega$ に対し x_h は $V_{\text{out}(h)}$ から $V_{\text{in}(h)}$ への $\mathbb{C}$ 線型写像

となっているものをいう。従って V を固定したとき、表現のなす集合は

$$\mathbf{M}_\Omega(V) := \bigoplus_{h \in \Omega} \text{Hom}(V_{\text{out}(h)}, V_{\text{in}(h)})$$

と表せる。本講演のタイトルにある籠多様体とは、この上の Lie 群

$$G_V := \prod_{i \in I} \text{GL}(V_i)$$

の自然な作用

$$G_V \ni g = (g_i)_{i \in I}: x = (x_h)_{h \in \Omega} \mapsto g \cdot x := \left(g_{\text{in}(h)} x_h g_{\text{out}(h)}^{-1} \right)_{h \in \Omega}$$

の余接束への持ち上げに関するシンプレクティック商によって定義される。これについて次で詳しく説明する。

2.2 籠多様体

籠 (I, Ω) , 及び有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の族 $V = (V_i)_{i \in I}$ を固定し、 $\mathbf{M}_\Omega(V)$ の (正則) 余接束 $T^*\mathbf{M}_\Omega(V) = \mathbf{M}_\Omega(V) \oplus \mathbf{M}_\Omega(V)^*$ を考える。各 $h \in \Omega$ に対し、 $\text{Hom}(V_{\text{out}(h)}, V_{\text{in}(h)})^*$ はトレースによって自然に $\text{Hom}(V_{\text{in}(h)}, V_{\text{out}(h)})$ と同一視できる。故に (I, Ω) の全ての矢を逆向きにして得られる籠を $(I, \bar{\Omega})$ とし、各 $h \in \Omega$ に対しその逆向きの矢を $\bar{h} \in \bar{\Omega}$ と表す事にすれば、 $\text{in}(\bar{h}) = \text{out}(h)$, $\text{out}(\bar{h}) = \text{in}(h)$ より自然な同一視

$$T^*\mathbf{M}_\Omega(V) \simeq \mathbf{M}_\Omega(V) \oplus \mathbf{M}_{\bar{\Omega}}(V)$$

が存在する。 $H := \Omega \sqcup \bar{\Omega}$ において新しい籠 (I, H) を導入すれば、上式は $T^*\mathbf{M}_\Omega(V) \simeq \mathbf{M}_H(V)$ とも書ける。この (I, H) を (I, Ω) のダブルと呼ぶ。向きを逆にする全単射 $\Omega \ni h \mapsto \bar{h} \in \bar{\Omega}$ が存在しているが、便宜上これを $\bar{\bar{h}} := h$ として H から自身への全単射に拡張しておく。また $\epsilon: H \rightarrow \{-1, 1\}$ を

$$\epsilon(h) = \begin{cases} 1 & \text{if } h \in \Omega, \\ -1 & \text{if } h \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

で定める。

$T^*\mathbf{M}_\Omega(V)$ 上の自然なシンプレクティック形式 ω は、 $\mathbf{M}_H(V)$ 上の微分形式とみると

$$\omega = \sum_{h \in \Omega} \text{tr} dx_h \wedge dx_{\bar{h}} = \frac{1}{2} \sum_{h \in H} \epsilon(h) \text{tr} dx_h \wedge dx_{\bar{h}}$$

と表される ($x = (x_h)_{h \in H} \in \mathbf{M}_H(V)$ を座標とみた)。 $\mathbf{M}_\Omega(V)$ 上の G_V 作用の $T^*\mathbf{M}_\Omega(V)$ 上への持ち上げは $\mathbf{M}_H(V)$ 上の自然な作用に対応し、この作用に関する運動量写像 $\mu_V: \mathbf{M}_H(V) \rightarrow \text{Lie } G_V = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{gl}(V_i)$ は

$$\mu_V(x) := \left(\sum_{h \in H; \text{in}(h)=i} \epsilon(h) x_h x_{\bar{h}} \right)_{i \in I}$$

で与えられる. ただし $(\mathrm{Lie} G_V)^*$ と $\mathrm{Lie} G_V$ をトレースで同一視した.

各 $\zeta = (\zeta_i) \in \mathbb{C}^I$ に対し $\zeta 1_V := (\zeta_i 1_{V_i}) \in \mathrm{Lie} G_V$ は G_V の随伴作用に関し不変である. 故に $\mu_V^{-1}(\zeta 1_V)$ は G_V 不変な閉集合となる.

$\mathbb{C}^\times$ を $a \mapsto (a 1_{V_i})$ によって G_V の部分群とみなすと, これは $M_H(V)$ 上自明に作用する事に注意する. 定理 1.1 より, もし $G_V/\mathbb{C}^\times$ の $\mu_V^{-1}(\zeta 1_V)$ 上の作用が自由かつ固有ならば, $\mu_V^{-1}(\zeta 1_V)$ は複素部分多様体で商空間 $\mu_V^{-1}(\zeta 1_V)/G_V$ は正則シンプレクティック多様体になる. しかし一般に $G_V/\mathbb{C}^\times$ の作用はそうになっていないため, 代数幾何学でよく知られる幾何学的不変式論の意味の安定性条件を導入する.

定義 2.1. $\sum_{i \in I} \theta_i \dim V_i = 0$ を満たす $\theta = (\theta_i) \in \mathbb{Q}^I$ が与えられたとする. このとき点 $x \in M(V)$ が θ 安定であるとは, 任意のベクトル空間の族 $S = (S_i)_{i \in I}$ で

$$S_i \subset V_i \quad (i \in I), \quad x_h(S_{\mathrm{out}(h)}) \subset S_{\mathrm{in}(h)} \quad (h \in H)$$

を満たすものに対し

$$\sum_{i \in I} \theta_i \dim S_i \leq 0$$

が成立し, 更に上の不等式で等号が成り立つのが $S = 0$, V の場合に限られる事をいう.

$\sum_{i \in I} \theta_i \dim V_i \neq 0$ であるような $\theta = (\theta_i) \in \mathbb{Q}^I$ に対しては, 全ての $M(V)$ の点が θ 安定でないとする.

定理 2.2. 部分集合

$$\mu_V^{-1}(\zeta 1_V)_\theta := \{x \in \mu_V^{-1}(\zeta 1_V) \mid x \text{ は } \theta \text{ 安定}\}$$

上 $G_V/\mathbb{C}^\times$ は自由に作用し, 商空間

$$\mathfrak{M}_{\zeta, \theta}^{\mathrm{reg}}(V) := \mu_V^{-1}(\zeta 1_V)_\theta / G_V$$

には自然に複素多様体の構造が入る. 故にこれは (空集合でなければ) $\dim M(V) - 2 \dim(G_V/\mathbb{C}^\times)$ 次元の正則シンプレクティック多様体となる.

定義 2.3. $\mathfrak{M}_{\zeta, \theta}^{\mathrm{reg}}(V)$ を θ 安定多様体と呼ぶ.

注意 2.4. θ 安定多様体を正確に定義するためには, θ 安定よりも弱い θ 半安定なる条件を導入する必要がある. θ 安定多様体 $\mathfrak{M}_{\zeta, \theta}(V)$ は, $\mu_V^{-1}(\zeta 1_V)$ 内の θ 半安定な点全体を S 同値と呼ばれる同値関係で割って得られる準射影的代数多様体で, 上の $\mathfrak{M}_{\zeta, \theta}^{\mathrm{reg}}(V)$ を Zariski 開集合として含む. ここでは話を簡単にするためにこの定義を省略した.

注意 2.5. 代数幾何学的に $\mu_V^{-1}(\zeta 1_V)$ の商を得る最も簡単な方法は, $\mu_V^{-1}(\zeta 1_V)$ の構造環 $\mathbb{C}[\mu_V^{-1}(\zeta 1_V)]$ の G_V 不変部分環を取り, そのスペクトラム $\mathrm{Spec} \mathbb{C}[\mu_V^{-1}(\zeta 1_V)]^{G_V}$ として定義するやり方である. こうして得られる代数多様体を $\mathfrak{M}_{\zeta, 0}(V) = \mu_V^{-1}(\zeta 1_V) // G_V$ で表す (この書き方で分かる通り, この空間は上の注意で簡単に紹介した $\mathfrak{M}_{\zeta, \theta}(V)$ の $\theta = 0$ の場合と実際に一致する). これは点集合としては $\mu_V^{-1}(\zeta 1_V)$ 内の閉 G_V 軌道のなす集合と 1 対 1 に対応し, 自然な固有写像 $\pi: \mathfrak{M}_{\zeta, \theta}(V) \rightarrow \mathfrak{M}_{\zeta, 0}(V)$ が存在する. この写像の幾何学的な意味は次の通りである: 各 $x \in \mu_V^{-1}(\zeta 1_V)$ に対し, これの G_V 軌道の閉包 $\overline{G_V x}$ の中に唯 1 つの閉 G_V 軌道が存在する. これを表す $\mathfrak{M}_{\zeta, 0}(V)$ 内の点を x に対応させる. この対応が導く写像が π である.

注意 2.6. 中島 θ 安定多様体 $\mathfrak{M}_{\zeta, \theta}(V, W)$ [N94, N98] は, V の他に更にもう 1 つの I で添え字付けられたベクトル空間の族 W をパラメータとして持ち, これが幾何学的表現論を展開する上で重要な役割を果たす. ここでは定

義をなるべく簡明にする意図もあって W のない定義を採用した. ただし事実として, W が付いた簾多様体も簾の頂点と矢印をなるべく増やして $\mathfrak{M}_{\zeta, \theta}(V)$ の形で表せる事が知られている [CB01].

2.3 乗法的簾多様体

乗法的簾多様体は, 簾多様体の定義において μ_V を乗法化する事によって得られる正則シンプレクティック多様体である.

まず, $M_H(V)$ の開部分集合として次のようなものを考える:

$$M_H^\circ(V) := \{x \in M_H(V) \mid \det(1 + x_h x_{\bar{h}}) \neq 0 \quad (h \in H)\}.$$

次に集合 H の上の全順序 $<$ を 1 つ固定して, 写像 $\Phi_V: M_H^\circ(V) \rightarrow G_V$ を以下で定める:

$$\Phi_V(x) := \left(\prod_{h \in H; \text{in}(h)=i}^< (1 + x_h x_{\bar{h}})^{\epsilon(h)} \right)_{i \in I}.$$

ここで, $<$ の順番で積を取っているという意味で積の記号の上に $<$ と書いた.

Van den Bergh は次を示した:

命題 2.7 ([V04, V07]). $M^\circ(V)$ 上の 2 次微分形式 ϖ を

$$\begin{aligned} \varpi &:= \frac{1}{2} \sum_{h \in H} \epsilon(h) \text{tr} (1 + x_h x_{\bar{h}})^{-1} dx_h \wedge dx_{\bar{h}} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{h \in H} \text{tr} \Phi_h^{-1} d\Phi_h \wedge d(1 + x_h x_{\bar{h}})^{\epsilon(h)} (1 + x_h x_{\bar{h}})^{-\epsilon(h)} \end{aligned}$$

と定める. ここで

$$\Phi_h = \prod_{\substack{h' \in H; \\ \text{in}(h')=\text{in}(h), h' < h}}^< (1 + x_{h'} x_{\bar{h}'})^{\epsilon(h')} \quad (h \in H)$$

とおいた. すると $(M^\circ(V), \varpi, \Phi_V)$ は乗法的 Hamilton G_V 空間となる.

この命題によって直ちに次が得られる:

定理 2.8. $(q, \theta) \in (\mathbb{C}^\times)^I \times \mathbb{Q}^I$ に対し

$$\Phi_V^{-1}(q)_\theta := \{x \in \Phi_V^{-1}(q1_V) \mid x \text{ は } \theta \text{ 安定}\}$$

と定めると, この上で $G_V/\mathbb{C}^\times$ は自由に作用し, 更に商空間

$$\mathcal{M}_{q, \theta}^{\text{reg}}(V) := \Phi_V^{-1}(q)_\theta / G_V$$

に自然に複素多様体の構造が入る. 故にこれは (空集合でなければ) $\dim M(V) - 2 \dim(G_V/\mathbb{C}^\times)$ 次元の正則シンプレクティック多様体となる.

定義 2.9. $\mathcal{M}_{q, \theta}^{\text{reg}}(V)$ を乗法的簾多様体と呼ぶ.

注意 2.10. Alekseev-Malkin-Meinrenken は C^∞ 多様体上のコンパクト Lie 群の作用のみを扱っており, 上のような複素代数幾何のカテゴリーでは群値運動量写像の理論を構成していない. しかし, 上の結果を証明する上で必要な部分, 特に定理 1.3 に限れば Boalch の論文 [B07] にて述べられているし, そこに証明は書かれていないものの, 実際比較的容易に証明する事ができる.

注意 2.11. 籠多様体の時 (注意 2.5 参照) と同様, $\mathcal{M}_{q,\theta}^{\text{reg}}(V)$ から $\mathcal{M}_{q,0}(V) := \text{Spec } \mathbb{C}[\Phi_V^{-1}(q)]^{G_V}$ への自然な写像がある. これも π と表す事にする. また籠多様体の時と同様にここでは定義していない θ 半安定性を用いて $\mathcal{M}_{q,\theta}(V)$ を定義すれば (注意 2.4 参照), π は $\mathcal{M}_{q,\theta}(V)$ から $\mathcal{M}_{q,0}(V)$ への固有写像に自然に延びる.

2.4 両者の関係

籠多様体 $\mathfrak{M}_{\zeta,\theta}^{\text{reg}}(V)$ と乗法的籠多様体 $\mathcal{M}_{q,\theta}^{\text{reg}}(V)$ の定義は非常に似ている. 実際, 写像 Φ_V を x_h に関して形式的に展開すると,

$$\Phi_V(x) = 1_V + \mu_V(x) + \cdots$$

となる. そこで $\mathfrak{M}_{0,\theta}^{\text{reg}}(V)$ と $\mathcal{M}_{1,\theta}^{\text{reg}}(V)$ の間に何らかの関係がある事が期待される. これを動機として講演者が得た結果が次の定理である. ただし主張の中で写像 $\pi: \mathfrak{M}_{0,\theta}^{\text{reg}}(V) \rightarrow \mathfrak{M}_{0,0}^{\text{reg}}(V)$ 及び $\pi: \mathcal{M}_{1,\theta}^{\text{reg}}(V) \rightarrow \mathcal{M}_{1,0}^{\text{reg}}(V)$ を用いた (注意 2.5 及び注意 2.11 参照).

定理 2.12. 籠 (I, Ω) , 及び I で添え字付けられたベクトル空間の族 V を任意に取る. この時 $0 \in \mathbf{M}(V)$ が代表する点 $[0] \in \mathcal{M}_{1,0}(V)$ の近傍 U 及び $[0] \in \mathfrak{M}_{0,0}(V)$ の近傍 U' , そして可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{1,\theta}^{\text{reg}}(V) \supset \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \pi^{-1}(U') \subset \mathfrak{M}_{0,\theta}^{\text{reg}}(V) \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ U & \xrightarrow{f} & U' \end{array}$$

が存在し, $\tilde{f}$ と f は共に複素解析空間としての同型写像で, 更に $\tilde{f}$ は正則シンプレクティック構造を保つ.

3 $\mathbb{P}^1$ 上の λ 放物接続のモジュライ空間

ここでは乗法的籠多様体の重要な例として, 稲葉・岩崎・齋藤 [IIS06] によって導入された $\mathbb{P}^1$ 上の λ 放物接続のモジュライ空間を紹介する.

X をコンパクト Riemann 面, $D \subset X$ を有限個の点からなる集合とする. (X, D) 上の対数型接続とは, X 上の正則ベクトル束 E 及び $E|_{X \setminus D}$ 上の正則接続 ∇ で次を満たすようなものをいう: 各 $p \in D$ に対し, p を中心とする X の正則局所座標 (U_p, z) 及び U_p 上の E の局所自明化が存在し, これらを用いて ∇ は $U_p \setminus \{p\}$ 上

$$\nabla = d + \frac{A(z)}{z} dz$$

と表わされる. ただし $A(z)$ は U_p 上正則な行列値関数である.

$z = 0$ における値 $A(0)$ は, 局所自明化や座標に依らないファイバー E_p の線型変換を与える. これを ∇ の $p \in D$ における留数と呼び, $\text{Res}_p \nabla$ で表す.

定義 3.1. 正の整数 r 及び複素数の族 $\lambda = (\lambda_p^j \mid p \in D, j = 0, \dots, r-1)$ を固定する. (E, ∇) を (X, D) 上の階数 r の対数型接続とする.

(E, ∇) の λ 放物構造とは, 各点 $p \in D$ におけるファイバー E_p のフィルター

$$\mathbf{F}_p : E_p = \mathbf{F}_p^0(E) \supsetneq \mathbf{F}_p^1(E) \supsetneq \dots \supsetneq \mathbf{F}_p^{r-1}(E) \supsetneq \mathbf{F}_p^r(E) = 0$$

で, 条件

$$(\text{Res}_p \nabla - \lambda_p^j) \mathbf{F}_p^j(E) \subset \mathbf{F}_p^{j+1}(E)$$

を満たすようなものからなるデータ $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_p)_{p \in D}$ をいう. 組 $(E, \nabla, \mathbf{F})$ を (X, D) 上の λ 放物接続と呼ぶ.

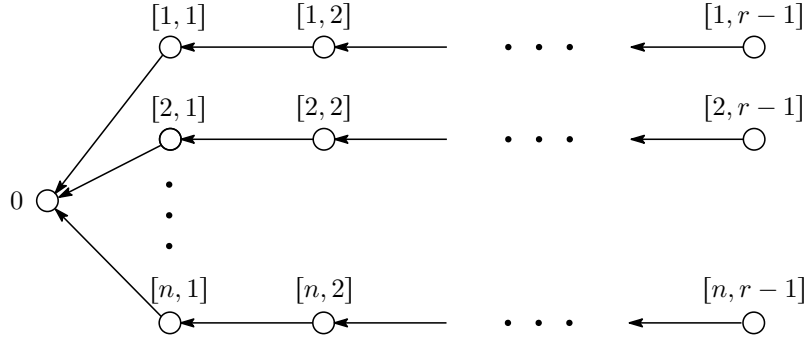
更に $\alpha = (\alpha_p^j \mid p \in D, j = 0, \dots, r-1)$ を有理数の族で $0 \leq \alpha_p^j < \alpha_p^{j+1} < 1$ を満たすものとする. λ 放物接続 $(E, \nabla, \mathbf{F})$ が α 安定であるとは, ∇ で保たれる任意の 0 でない非自明な部分ベクトル束 $F \subsetneq E$ に対して

$$\sum_{p \in D} \sum_j \alpha_p^j \frac{\dim(F \cap \mathbf{F}_p^j(E)) / (F \cap \mathbf{F}_p^{j+1}(E))}{\text{rank } F} < \sum_{p \in D} \sum_j \alpha_p^j \frac{\dim(\mathbf{F}_p^j(E) / \mathbf{F}_p^{j+1}(E))}{\text{rank } E}$$

が成立する事をいう.

以上の準備の下, この節の主定理を述べる:

定理 3.2. $X = \mathbb{P}^1$, $\sharp D = n$ とし, $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, λ, α を固定し, $\text{Re } \lambda_p^j$ が全て有理数であると仮定する. このとき次のような籠 (I, Ω) を考える:



I で添え字付けられたベクトル空間の族 V を

$$\dim V_0 = r, \quad \dim V_{[i,j]} = r - j$$

となるように取る. すると適当な $(q, \theta) \in (\mathbb{C}^\times)^I \times \mathbb{Q}^I$ に対し, $\mathcal{M}_{q, \theta}^{\text{reg}}(V)$ は (X, D) 上の階数 r の α 安定 λ 放物接続のモジュライ空間と正則シンプレクティック多様体として同型となる.

上の定理で主張を簡潔にするために「適当な (q, θ) に対し」と述べているが, 実際には (q, θ) は (λ, α) を用いて具体的に書ける. 記述が複雑なためここではそれを省略するが, より正確に言うと q は $\exp(-2\pi\sqrt{-1}\lambda_p^j)$ から決まり, θ は α と $\text{Re } \lambda_p^j$ から決まる. 仮定にある条件 $\text{Re } \lambda_p^j \in \mathbb{Q}$ はそのためにある.

注意 3.3. 上の定理で定まった籠と V, q に対し $\mathcal{M}_{q,0}(V)$ はどのような空間であるか? 実は, Kraft-Procesi の議論 [KP79] を応用する事により閉埋め込み

$$\mathcal{M}_{q,0}(V) \rightarrow \{ (B_1, \dots, B_n) \in \text{GL}(V_0)^n \mid B_1 \cdots B_n = \mathbf{1} \} // \text{GL}(V_0)$$

が自然に定まる. 上式右辺の空間は基本群の表現のモジュライ空間 $\text{Hom}(\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus D, *), \text{GL}(V_0)) // \text{GL}(V_0)$ に他ならず, $\mathcal{M}_{q,0}(V)$ をこの中の (特異点を持った) 閉部分多様体とみなすと, 注意 2.11 で与えられた写像 $\pi: \mathcal{M}_{q,\theta}^{\text{reg}}(V) \rightarrow \mathcal{M}_{q,0}(V)$ は, $(E, \nabla, \mathbf{F})$ に対し局所系 $\text{Ker}(\nabla|_{X \setminus D})$ の定める基本群の表現 (の同値類) を対応させる写像と見做せる.

注意 3.4. 定理にある正則シンプレクティック多様体としての同型写像は, 実は代数多様体の間の同型写像ではない. 乗法的籠多様体 $\mathcal{M}_{q,\theta}^{\text{reg}}(V)$ は「局所系のモジュライ空間」と捉えるべきもので, 定理の同型写像は **Riemann-Hilbert** 対応に相当する. 実際, 同型写像は Simpson [S90] が与えた放物接続に対する Riemann-Hilbert 対応を経由する. Riemann-Hilbert 対応は途中で「微分方程式を解く」という操作を挟んでいるため, あくまで解析的な, 代数的ではない対応となっている.

注意 3.5. 一般に放物接続と言ったら, 各ファイバー E_p に入っているフィルターがフルでなくとも良い (すなわち $\mathbf{F}_p^j(E)/\mathbf{F}_p^{j+1}(E)$ が 1 次元でなくとも良い) し, また $\text{Res}_p \nabla$ が誘導する $\mathbf{F}_p^j(E)/\mathbf{F}_p^{j+1}(E)$ 上の線型変換もスカラー値でなくとも良い (λ 放物接続の場合はスカラー値 λ_p^j であった). しかしこの場合も, 階数, $\dim \mathbf{F}_p^j(E)/\mathbf{F}_p^{j+1}(E)$ 及び $\mathbf{F}_p^j(E)/\mathbf{F}_p^{j+1}(E)$ 上の $\text{Res}_p \nabla$ が誘導する線型変換の住処を共役類で指定してできる α 安定放物接続のモジュライ空間は, ある乗法的籠多様体と双正則になる.

4 鏡映関手と乗法的鏡映関手 (中間畳み込み)

この節では籠 (I, Ω) がループ ($\text{in}(h) = \text{out}(h)$) となる $h \in \Omega$ を持たないと仮定する. 行列 $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{ij})_{i,j \in I}$ を

$$\mathbf{C}_{ij} := 2\delta_{ij} - \#\{h \in H \mid \text{in}(h) = i, \text{out}(h) = j\}$$

によって定める. 仮定より $\mathbf{C}_{ii} = 2$ であり, $\mathbf{C}$ は対称行列である事に注意する.

頂点 $i \in I$ を 1 つ固定する. ϵ_i を $\mathbb{Z}^I$ における i 番目の標準基底ベクトルとし, 線型写像 $s_i, r_i: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}^I$ を

$$\begin{aligned} s_i(\alpha) &:= \beta - \sum_{j \in I} \mathbf{C}_{ij} \alpha_j \epsilon_i, \\ r_i(\theta) &:= \theta - \theta_i \sum_{j \in I} \mathbf{C}_{ij} \epsilon_j \end{aligned}$$

と定める. $\mathbf{C}$ によって定まる $\mathbb{Z}^I$ 上の対称双線型形式を $(\cdot, \cdot)$ で表し, 通常の内積を単に $\cdot$ で表す事にすれば,

$$s_i(\alpha) = \alpha - (\epsilon_i, \alpha) \epsilon_i, \quad s_i(\alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot r_i(\beta)$$

である.

籠多様体 $\mathfrak{M}_{\zeta,\theta}^{\text{reg}}(V)$ を考える. もし $\dim V = \epsilon_i$, すなわち $V_i = \mathbb{C}$ で $j \neq i$ のとき $V_j = 0$ ならば, $\mathbf{M}(V) = 0$ で θ 安定性は自明な条件となるから

$$\mathfrak{M}_{\zeta,\theta}^{\text{reg}}(V) = \mathfrak{M}_{\zeta,\theta}(V) = \begin{cases} 1 \text{ 点} & (\zeta = 0), \\ \emptyset & (\zeta \neq 0) \end{cases}$$

となる事が容易に分かる. そこで $\dim V \neq \epsilon_i$ と仮定する.

定理 4.1 (Lusztig [L00], Maffei [M02], 中島 [N03]). 上の仮定の下で更に $s_i(\dim V) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ ならば, 籠多様体 $\mathfrak{M}_{\zeta,\theta}^{\text{reg}}(V)$ は空集合である. $s_i(\dim V) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ の時, 新たなパラメータ V', ζ', θ' を次の式で与える:

$$\dim V' = s_i(\dim V), \quad \zeta' = r_i(\zeta), \quad \theta' = r_i(\theta).$$

すると $\mathfrak{M}_{\zeta, \theta}^{\text{reg}}(V)$ と $\mathfrak{M}_{\zeta', \theta'}^{\text{reg}}(V')$ は同型である.

上の定理の同型写像は具体的に構成する事ができ [N03], これを鏡映関手と呼ぶ. 「関手」という名で呼ばれている理由は, もともと籠の表現論でそのような概念があり, 籠多様体の同型はそれを応用して構成されたものだからである.

実は, 乗法的籠多様体でも同様の結果が得られる:

定理 4.2. $\dim V \neq \epsilon_i$ かつ $s_i(\dim V) \notin \mathbb{Z}^I$ ならば, 乗法的籠多様体 $\mathcal{M}_{q, \theta}^{\text{reg}}(V)$ は空集合である. $s_i(\dim V) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ の時, 新たなパラメータ V', θ' を先の定理と同じように与え, また $q' = (q'_j)$ を $q'_j := q_j q_i^{-(\alpha_i, \alpha_j)}$ で与える. すると $\mathcal{M}_{q, \theta}^{\text{reg}}(V)$ と $\mathcal{M}_{q', \theta'}^{\text{reg}}(V')$ は同型である.

この結果は, $q_i \neq 1$ の場合に Crawley-Boevey–Shaw が中間畳み込み (**middle convolution**) という名で構成した写像 $\Phi_V^{-1}(q)/G_V \rightarrow \Phi_{V'}^{-1}(q')/G_{V'}$ を基にしている [CBS06]. ただし彼らは籠の表現の圏の言葉で書いているので, 安定性等の幾何学的な問題は考えていないし, またこの写像自体 $q_i = 1$ では定義できないものなので, その場合も考えていない.

この結果の証明は, Lusztig [L00] 及び Maffei [M02] による鏡映関手の correspondence を用いた定式化と, 中島の証明 [N03] を参考にして得られた.

参考文献

- [AMM98] A. Alekseev, A. Malkin and E. Meinrenken, *Lie group valued moment maps*, J. Differential Geom. **48** (1998), no. 3, 445–495.
- [B07] P. Boalch, *Quasi-Hamiltonian geometry of meromorphic connections*, Duke Math. J. **139** (2007), no. 2, 369–405.
- [CB01] W. Crawley-Boevey, *Geometry of the moment map for representations of quivers*, Compositio Math. **126** (2001), no. 3, 257–293.
- [CBS06] W. Crawley-Boevey and P. Shaw, *Multiplicative preprojective algebras, middle convolution and the Deligne–Simpson problem*, Adv. Math. **201** (2006), no. 1, 180–208.
- [IIS06] M. Inaba, K. Iwasaki and M. Saito, *Moduli of stable parabolic connections, Riemann–Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **42** (2006), no. 4, 987–1089.
- [KP79] H. Kraft and C. Procesi, *Closures of conjugacy classes of matrices are normal*, Invent. Math. **53** (1979), no. 3, 227–247.
- [L00] G. Lusztig, *Quiver varieties and Weyl group actions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), no. 2, 461–489.
- [M02] A. Maffei, *A remark on quiver varieties and Weyl groups*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **1** (2002), no. 3, 649–686.
- [N94] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac–Moody algebras*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 2, 365–416.
- [N98] H. Nakajima, *Quiver varieties and Kac–Moody algebras*, Duke Math. J. **91** (1998), no. 3, 515–560.
- [N03] H. Nakajima, *Reflection functors for quiver varieties and Weyl group actions*, Math. Ann. **327** (2003),

- no. 4, 671–721.
- [S90] C. T. Simpson, *Harmonic bundles on noncompact curves*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 3, 713–770.
 - [V04] M. Van den Bergh, *Double Poisson algebras*, arXiv:math.QA/0410528.
 - [V07] M. Van den Bergh, *Non-commutative Quasi-Hamiltonian Spaces*, arXiv:math.QA/0703293.
 - [Y07] D. Yamakawa, *Geometry of Multiplicative Preprojective Algebra*, arXiv:0710.2649.