

乗法的叢多様体 – $\mathbb{P}^1$ 上の放物接続と中間畳み込み –

山川大亮 京都大学数学教室

本講演では、中島によって導入された叢多様体 $[N]$ の「乗法的な類似物」と言えるような空間（乗法的叢多様体）を導入し、これに関して筆者が最近得た結果を紹介したい。

Lie 群の余随伴軌道が自然にシンプレクティック多様体となる事は良く知られている。 $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n \subset \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ を n 個の半単純余随伴軌道とし、シンプレクティック商として次のような空間を考える：

$$\mathfrak{M} := \{ (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n \mid A_1 + \dots + A_n = 0 \} / \mathrm{GL}(N, \mathbb{C}).$$

ただしこれが多様体になるよう、 $\mathcal{O}_i$ 達が何らかの意味で generic であるとする。 $\mathbb{C}$ 内の n 個の相異なる点 $p_1, \dots, p_n$ を固定し、 $\mathfrak{M}$ の点 $(A_1, \dots, A_n)$ に対し $\mathbb{P}^1$ 上の有理型 1 形式 $\omega = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z-p_i} dz$ を対応させると、これは方程式 $\sum A_i = 0$ より無限遠点で極を持たない。従ってこの 1 形式が定める微分方程式 $(d - \omega)f = 0$ を考える事により、 $\mathfrak{M}$ は $\mathbb{P}^1$ 上の $\{p_i\}$ に極を持つ Fuchs 型常微分方程式を parametrize する空間とみなせる。

さて、上のような常微分方程式の各 p_i の周りでの局所モノドロミーは、(固有値が generic という条件の下で) $\mathcal{C}_i := \exp 2\pi\sqrt{-1}\mathcal{O}_i \subset \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ に入る。従ってモノドロミーを取る操作によって $\mathfrak{M}$ から空間

$$\mathcal{M} := \{ (B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{C}_1 \times \dots \times \mathcal{C}_n \mid B_1 \cdots B_n = \mathrm{id} \} / \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$$

への自然な写像 $\mathrm{RH}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{M}$ が存在する。

$\mathcal{M}$ は Poisson 構造を自然に持つ平坦接続のモジュライ空間 $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{p_i\}), \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})) / \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ のシンプレクティック葉になっており、特にシンプレクティック構造を持つ。そして RH はシンプレクティック形式を保つ写像である事を示す事ができる [H]。これは全射でもなく、代数的な写像でもないが、しかし $\mathfrak{M}$ と $\mathcal{M}$ がとても近い存在である事はお分かり頂けると思う。

実は $\mathfrak{M}$ は星型叢に伴う叢多様体として得られる事が知られているが、Crawley-Boevey と Shaw [CS] は、 $\mathfrak{M}$ と同様に $\mathcal{M}$ も叢の表現で理解できる事を発見した。叢多様体は叢の表現のなすベクトル空間の余接束上で ADHM 方程式（叢の表現論の立場から言えば、preprojective relation）と呼ばれる 2 次方程式を考えて構成されるが、彼らは同じ空間（のある開集合）の上で multiplicative preprojective

relation と呼ばれる方程式を考え、星型叢の時に $\mathcal{M}$ が得られる事を示した。更に、彼らは multiplicative preprojective な表現に対し、preprojective な表現の鏡映関手の類似物と言えるものを構成した。この構成の背景には中間畳み込みと呼ばれる $\mathbb{P}^1 \setminus \{p_i\}$ 上の局所系の変換があり、それを理由としてこの変換も同じ名前で呼ばれている。

筆者の最近の研究は、中島の叢多様体のように multiplicative preprojective な表現の幾何を豊富に展開する事を目標としている。最初に述べたように、講演ではそのような対象（乗法的叢多様体）に関し現在までに得られた幾つかの結果を紹介する予定である。特に 2 つ程挙げると、星型叢の乗法的叢多様体は $\mathbb{P}^1 \setminus \{p_i\}$ 上のフィルター付き局所系 $[S]$ を自然に parametrize する事（これは放物平坦接続と Riemann-Hilbert 対応によって 1 対 1 に対応する）、また、中間畳み込みによる変換が鏡映関手のように、乗法的叢多様体から異なる乗法的叢多様体への同型写像を誘導する事を紹介したい。

参考文献

- [CS] W. Crawley-Boevey and P. Shaw, *Multiplicative preprojective algebras, middle convolution and the Deligne-Simpson problem*, Adv. Math. **201** (2006), no. 1, 180–208.
- [H] N. Hitchin, *Frobenius manifolds. With notes by David Calderbank*, Gauge theory and symplectic geometry (Montreal, PQ, 1995), 69–112, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 488, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [N] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 2, 365–416.
- [S] C. T. Simpson, *Harmonic bundles on noncompact curves*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 3, 713–770.