

Twisted wild character varieties

山川 大亮 (東京工業大学 大学院理工学研究科)*

概 要

Alekseev–Malkin–Meinrenken の擬ハミルトン空間の理論を用いて, Boalch は wild character variety と呼ばれる代数多様体上のポアソン構造を構成した. 本稿では, 最近 Boalch との共同研究により得られた wild character variety の拡張と, その上のポアソン構造を構成するのに有効な擬ハミルトン空間の理論の拡張について述べる.

はじめに

本稿では, Philip Boalch との共同研究により得られた結果 [5] について解説する.

Σ を滑らかな複素射影代数曲線, $\alpha \subset \Sigma$ を空でない有限集合とし, $\Sigma^\circ = \Sigma \setminus \alpha$ とおく. Σ° 上の代数的ベクトル束とその上の接続からなる組 $(\mathcal{V}, \nabla)$ を, α に特異点を持つ Σ 上の有理型接続と呼ぶ. 有理型接続の特異点は, 確定特異点と呼ばれるある種 tame なものと, 不確定特異点と呼ばれる wild なものの二種類に分かれる.

確定特異点型接続, すなわち特異点が全て確定特異点であるような有理型接続については, 次の Deligne [6] の結果がよく知られている: α に特異点を持つ Σ 上の確定特異点型接続 $(\mathcal{V}, \nabla)$ に対し, その水平切断の芽のなす Σ° 上の有限次元複素ベクトル空間の局所系 $\ker \nabla$ を対応させる事で, 両者の圏の間の同値関手が定まる. この圏同値をリーマン・ヒルベルト対応と呼ぶ.

α における Σ の有向実ブローアップを $\pi: \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ としよう. 従って $\hat{\Sigma}$ は境界付き実曲面であり, その境界 ∂ の連結成分は α の各点の π による逆像 (向きの付いた S^1) で与えられる. $\pi_1(\hat{\Sigma}) \simeq \pi_1(\Sigma^\circ)$ に注意して, Σ° 上の局所系の代わりに $\hat{\Sigma}$ 上の局所系を考えよう. 基点の集合 $\beta \subset \partial$ を境界の各連結成分との交わりが1点となるように取る. このとき β における枠を備えた $\hat{\Sigma}$ 上の階数 n の局所系の同型類全体と, β を基点集合とする $\hat{\Sigma}$ の基本亜群の表現空間

$$\mathrm{Hom}(\Pi_1(\hat{\Sigma}, \beta), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$$

の間に全単射がある (モノドロミー表現を取る写像). この表現空間は群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\beta := \mathrm{Map}(\beta, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の自然な作用について, Alekseev–Malkin–Meinrenken [1] によって導入された擬ハミルトン空間の構造を持ち, 特にアフィン商

$$\mathcal{M}_B := \mathrm{Hom}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\beta \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(\hat{\Sigma}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

はポアソン構造を持つ. なお $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を一般の連結複素簡約代数群にしても同様の事がいえる. 空間 $\mathcal{M}_B$ を **character variety** と呼ぶ.

ここで擬ハミルトン空間について少し述べておこう (詳しくは第3節を参照). 連結複素簡約群 G が作用するシンプレクティック代数多様体 (M, ω) と, 運動量写像と呼ばれる射 $\mu: M \rightarrow (\mathrm{Lie} G)^*$ からなる組 (M, ω, μ) をハミルトン G 空間と呼ぶ. 擬ハミルト

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻
e-mail: yamakawa@math.titech.ac.jp

ン空間はハミルトン空間の「乗法的類似物」といえるもので、ハミルトン空間の運動量写像がリー環の双対空間に値を取る一方、擬ハミルトン空間の運動量写像は作用する群に値を取る。先程の基本重群の表現空間の場合、運動量写像は各基点における境界成分に沿ったモノドロミーで与えられる。

ところでリーマン・ヒルベルト対応は不確定特異点型接続に対しても拡張されており（例えば[14]を参照）、その場合に有理型接続に対応するものをストークスデータもしくは一般モノドロミーデータと呼ぶ。Boalch [4] は、不確定特異点が全て「不分岐」と呼ばれる性質を持つ場合に、 $\hat{\Sigma}$ からいくつかの点を除いて得られる補助的な曲面 $\tilde{\Sigma}$ 、及びその基本重群の表現空間のある特別な部分多様体（ストークス表現の空間）

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi_1(\tilde{\Sigma}, \beta), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \subset \mathrm{Hom}(\Pi_1(\tilde{\Sigma}, \beta), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$$

を導入し、ある簡約部分群 $\mathbf{H} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\beta$ の作用に関するこの空間内の軌道がストークスデータの同型類をパラメータ付ける事を示した。更に、この部分多様体が擬ハミルトン $\mathbf{H}$ 空間の構造を持つ事を示し、その系としてアフィン商 (wild character variety)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi_1(\tilde{\Sigma}, \beta), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))/\mathbf{H}$$

の上にポアソン構造が定まる事を示した（実際には $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が一般の複素簡約群になった場合でも示されている）。この場合の運動量写像も、やはり各境界成分に沿ったモノドロミー（有理型接続の形式的モノドロミーと呼ばれるものに対応する）を考える事で得られる。

今回 [5] で得られた結果は、不分岐とは限らない一般の場合への上の結果の拡張である。これを紹介するため本稿の構成を次のようにした：第1節でストークス表現の空間を導入するための準備を行い、第2節で (twisted) wild character variety をアフィン代数多様体として導入する。不分岐の場合と異なり、一般の場合にはストークス表現の空間に擬ハミルトン空間の構造が自然には入らない。何故なら、境界に沿ったモノドロミーが一般には $\mathbf{H}$ の元でないからである。この問題を解決するのに有効な、擬ハミルトン空間の概念そのものの拡張について第3節で述べ、それを用いて第4節で主定理を述べる。なお、話を分かりやすくするため基本的に構造群が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の場合に限って述べるが、[5] では一般の（連結）複素簡約構造群の場合、更には構造群が「局所定数で動く」場合も扱っている。第4節でこのような構造群の一般化にも少し触れる。

1. 有理型接続の形式的分類理論と次数付き局所系

この節ではよく知られている有理型接続の形式的分類理論を手短に紹介する。

Σ を滑らかな複素代数曲線とする。基点 $0 \in \Sigma$ を取り、簡単のため点 0 で消える局所座標 z を固定する。 $\Sigma \setminus \{0\}$ 上の接続 $(\mathcal{V}, \nabla)$ に対し、射 $\mathrm{Spec} \mathbb{C}((z)) \rightarrow \Sigma \setminus \{0\}$ で引き戻す事で $\mathrm{Spec} \mathbb{C}((z))$ 上の接続、すなわち $\mathbb{C}((z))$ 上の有限次元ベクトル空間 V とライプニッツ則を満たす $\mathbb{C}$ 線形写像 $\nabla: V \rightarrow Vdz$ からなる対 (V, ∇) が得られる。形式的分類とは、 $\mathrm{Spec} \mathbb{C}((z))$ 上の接続の分類を指す。

1.1. Hukuhara–Turrittin の定理

$\mathcal{P} = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}_{>0}} \mathbb{C}((z^{1/r}))$ をピュイズー級数体、 $\mathcal{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}_{>0}} \mathbb{C}[[z^{1/r}]]$ を負べきの項を持たないピュイズー級数からなる部分環とし、

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}/\mathcal{R} \simeq \bigcup_{r \in \mathbb{Z}_{>0}} z^{-1/r} \mathbb{C}[z^{-1/r}]$$

とおく. モノドロミー $\sigma: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, $\sigma(z^a) = e^{2\pi\sqrt{-1}a}z^a$ は $\mathcal{R}$ を保ち, $\mathcal{Q}$ の変換を誘導する.

次は Hukuhara [7] と Turrittin [12] の結果を言い換えたものである.

定理 1.1. $\text{Spec } \mathbb{C}((z))$ 上の接続 (V, ∇) の圏と, $\mathcal{Q}$ 次数付き有限次元複素ベクトル空間

$$W = \bigoplus_{q \in \mathcal{Q}} W_q$$

と W の線形自己同型 M_W からなる対 (W, M_W) で $M_W(W_q) = W_{\sigma(q)}$, $q \in \mathcal{Q}$ を満たすものの圏の間に直和・テンソル積を保つ圏同値がある.

大雑把に言えば, 接続 (V, ∇) に対し W は形式解のなすベクトル空間, M_W は形式解のモノドロミーによって与えられる. この証明は例えば [14] にある.

$\Sigma \setminus \{0\}$ 上の接続 $(\mathcal{V}, \nabla)$ が定める $\text{Spec } \mathbb{C}((z))$ 上の接続に対し (W, M_W) が対応するとき, σ 不変集合 $\text{Irr} := \{q \in \mathcal{Q} \mid \dim W_q \neq 0\}$ の元を接続 $(\mathcal{V}, \nabla)$ の特異点 0 における固有値と呼ぶ事がある. $\text{Irr} = \{0\}$ であるとき, 点 $0 \in \Sigma$ を接続 $(\mathcal{V}, \nabla)$ の確定特異点という. $\text{Irr} \neq \{0\}$ で Irr への σ の作用が自明であるときは不分岐不確定特異点, Irr への σ の作用が非自明であるときは分岐不確定特異点という.

W の $\mathcal{Q}$ 次数付きベクトル空間としての同型類を $(\mathcal{V}, \nabla)$ の $0 \in \Sigma$ における不確定類という. $\langle \sigma \rangle \subset \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{Q})$ を σ によって生成される巡回群とすると, 階数 n の接続の不確定類と軌道集合 $\mathcal{Q}/\langle \sigma \rangle$ 上の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 値関数 $I \mapsto n_I$ で

$$\sum_{I \in \mathcal{Q}/\langle \sigma \rangle} n_I \cdot \#I = n$$

を満たすものは 1 対 1 に対応する (ただし $\#I$ は I の濃度を表す).

1.2. 次数付き局所系による言い換え

$\pi: \widehat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ を Σ の 0 における有向実ブローアップとし, $\partial = \pi^{-1}(0) \simeq S^1$ とおく. 定理 1.1 に現れる対 (W, M_W) は, W を ∂ のある点におけるファイバー, M_W をモノドロミーとする ∂ 上のベクトル空間の局所系を定める. $\text{Spec } \mathbb{C}((z))$ 上の接続のこのような見方は接続の大域的分類について述べる上で有用である. W が持つ次数付けを局所系の言葉で言い換えるために, 対 $(\mathcal{Q}, \sigma)$ に対応する局所系を次のように定義しておこう.

∂ の各開区間 U に対し, 0 を中心とし中心角が U で与えられる扇形領域の芽 $\text{Sect}(U)$ が定まる. その上の正則関数 q の $z = 0$ における芽で,

$$q = \sum_{i=1}^k a_i z^{-i/r} \quad (a_i \in \mathbb{C}, r, k \in \mathbb{Z}_{>0})$$

の形で表されるもの全体を $\mathcal{I}(U)$ とする. $\mathcal{I}(U)$ 達はファイバーが $\mathcal{Q}$ と同型な ∂ 上のベクトル空間の局所系を定めるが, これをあえて集合の局所系, すなわち被覆空間 $\pi: \mathcal{I} \rightarrow \partial$ とみなす. すると $\mathcal{I}$ の連結成分と $\mathcal{Q}$ における $\langle \sigma \rangle$ 軌道の間に自然な全単射がある. 連結成分 $I \in \pi_0(\mathcal{I})$ に対し, 被覆 $\pi: I \rightarrow \partial$ の次数を $\text{ram}(I)$ とおけば, これは対応する $\langle \sigma \rangle$ 軌道の元の個数に等しく, 各元は $z^{-1/r}$, $r = \text{ram}(I)$ の多項式である. その次数を $\deg(I)$ と書き, $\text{lev}(I) := \deg(I)/\text{ram}(I)$ を I (またはその元) のレベルと呼ぶ.

定義 1.2. $\mathcal{L}$ を ∂ 上の有限次元ベクトル空間の局所系とする．各点 $b \in \partial$ におけるファイバー $\mathcal{L}_b$ が $\mathcal{I}_b$ による次数付け

$$\mathcal{L}_b = \bigoplus_{q \in \mathcal{I}_b} \mathcal{L}_{b,q}$$

を備えており，これが $\mathcal{I}$ の局所系構造と次の意味で両立するとき， $\mathcal{L}$ を ∂ 上の $\mathcal{I}$ 次数付き局所系という： ∂ における任意の道 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \partial$ に対し， $\mathcal{I}, \mathcal{L}$ における γ に沿った平行移動を共に γ_* で表したとき，

$$\gamma_*(\mathcal{L}_{\gamma(0),q}) = \mathcal{L}_{\gamma(1),\gamma_*(q)} \quad (q \in \mathcal{I}_{\gamma(0)})$$

が成り立つ．

先の定理を $\mathcal{I}$ 次数付き局所系の言葉で言い換えると次のようになる (Deligne による)：

定理 1.3. $\text{Spec } \mathbb{C}((z))$ 上の接続のなす圏と ∂ 上の $\mathcal{I}$ 次数付き局所系のなす圏は同値である．

また接続の不確定類を $\mathcal{I}$ 次数付き局所系の言葉で言い換えると次のようになる：

定義 1.4. ∂ 上の $\mathcal{I}$ 次数付き局所系の局所同型類を不確定類と呼ぶ．

従って二つの $\mathcal{I}$ 次数付き局所系 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ が同じ不確定類に属するための必要十分条件は，任意の $b \in \partial$ に対し $\mathcal{L}_b$ と $\mathcal{L}'_b$ が $\mathcal{I}_b$ 次数付きベクトル空間として同型となる事である．

1.3. POM とストークス群

∂ 上の被覆空間 $\mathcal{I}$ は特別な点を持つ．

定義 1.5. 次の条件を満たす点 $q \in \mathcal{I}$ を **POM** (point of maximal decay) と呼ぶ： q を $q = a_k z^{-k/r} + a_{k-1} z^{-(k-1)/r} + \dots$ と書いたとき， $a_k z^{-k/r}$ が $\pi(q) \in \partial$ の定める半直線 $\mathbb{R}_{>0} \pi(q)$ 上で負の実数となる．

各連結成分 $I \in \pi_0(\mathcal{I})$ は，その上に丁度 $\deg(I)$ 個の POM を持つ事が容易に確かめられる．

$\mathcal{L}$ を ∂ 上の $\mathcal{I}$ 次数付き局所系とする．このとき $\text{End } \mathcal{L} = \text{Lie}(\text{Aut } \mathcal{L})$ も $\mathcal{I}$ 次数付き局所系となる．各 $d \in \partial$ に対し， $\mathcal{I}_d$ のすべての POM q に渡る $(\text{End } \mathcal{L}_d)_q$ の直和を sto_d と定める．これは $\text{End } \mathcal{L}_d$ の冪零部分リー環である事が知られている．そこで

$$\text{Sto}_d = \exp(\text{sto}_d) \subset \text{Aut } \mathcal{L}_d$$

とおく．

定義 1.6. 集合 $\mathbb{A} := \{d \in \partial \mid \dim \text{sto}_d > 0\}$ の元を特異方向と呼び，各 $d \in \mathbb{A}$ に対し Sto_d を特異方向 d に付随するストークス群と呼ぶ．

集合 $\mathbb{A}$ は $\mathcal{L}$ の不確定類のみに依る事に注意しよう．また $\mathcal{I}$ 次数付き局所系 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ が局所同型であれば，同型 $\mathcal{L}_d \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'_d$ で両者のストークス群は移り合う．この意味でストークス群も不確定類のみに依る概念である．

2. Twisted wild character varieties

この節でストークス局所系を導入し，これを用いて有理型接続の大域的分類に関する既知の結果 (リーマン・ヒルベルト対応) を言い換える．

2.1. ストークス局所系とリーマン・ヒルベルト対応

Σ をコンパクトリーマン面（境界を持っても良い）， $\alpha \subset \Sigma \setminus \partial\Sigma$ を有限部分集合とし， $\Sigma^\circ = \Sigma \setminus \alpha$ とおく． $\pi: \widehat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ を α における Σ の有向実ブローアップとし，その境界 ∂ は空でないと仮定する．定義から， ∂ は Σ の境界 $\partial\Sigma$ と有向実ブローアップでできた新たな境界 $\pi^{-1}(\alpha)$ の和である．

各 $i \in \alpha$ に対し，前に定義した $\mathcal{I}$ に相当する $\pi^{-1}(i)$ 上の局所系 $\mathcal{I}_i \rightarrow \pi^{-1}(i)$ が定まる． $\pi^{-1}(i)$ における階数 n の不確定類 Q_i を任意に取って $\mathbf{Q} = (Q_i)$ とする．

定義 2.1. 組 $\Sigma = (\Sigma, \alpha, \mathbf{Q})$ を階数 n の不確定曲線と呼ぶ．

不確定曲線 Σ に次のような実曲面 $\widetilde{\Sigma}$ を付随させる． $A_i \subset \pi^{-1}(i)$ を不確定類 Q_i の特異方向のなす集合とし， $A = \bigcup A_i \subset \partial$ とおく．また各 $\pi^{-1}(i)$ の小さな管状近傍 N_i を取る．各 $d \in A_i$ から N_i の境界 $\overline{N}_i \setminus N_i$ に向かって線分を互いに交わらないよう引き，その終点を $e(d) \in \overline{N}_i \setminus N_i$ として

$$\widetilde{\Sigma} = \widehat{\Sigma} \setminus \{e(d) \mid d \in A\}$$

とおく．各 $d \in A$ に対し， d を基点とし $e(d)$ の周りを一周する単純閉曲線 γ_d を取る．

定義 2.2. Σ 上のストークス局所系とは， $\widetilde{\Sigma}$ 上の階数 n の局所系 $\mathcal{L}$ で次の条件を満たすものをいう．

- (1) $\mathcal{L}$ の各 N_i への制限は Q_i を不確定類とする $\mathcal{I}_i$ 次数付き局所系の構造を持つ．
- (2) $\mathcal{L}$ の各 γ_d に沿ったモノドロミーはストークス群 $\text{Sto}_d \subset \text{Aut } \mathcal{L}_d$ に属す．

ここで $\mathcal{I}_i$ は N_i 上の局所系へ自明な方法で延長している．ストークス局所系の同型の定義は明らかであろう： $\widetilde{\Sigma}$ 上の局所系としての同型であって，各 N_i に制限したとき $\mathcal{I}_i$ 次数付き局所系の同型となるものである．

このストークス局所系に枠を付ける事を考えよう．境界 ∂ の各連結成分の基点を一つずつ取り，それら基点の集合を $\beta \subset \partial$ とする．各 $b \in \partial$ に対し， b を含む ∂ の唯一の連結成分を ∂_b と書く．各 $i \in \alpha$ に対し，不確定類 Q_i に属す $\pi^{-1}(i)$ 上の $\mathcal{I}_i$ 次数付き局所系 $\mathcal{L}_i$ を取る．基点 $b \in \beta \cap \pi^{-1}(i)$ におけるファイバー $(\mathcal{L}_i)_b$ は $(\mathcal{I}_i)_b$ 次数付きベクトル空間である． $(\mathcal{L}_i)_b$ の基底を任意に取り，それによって $\mathbb{C}^n$ に $(\mathcal{I}_i)_b$ 次数付きベクトル空間の構造を入れたものを F_b とおく．また $b \in \beta \cap \partial\Sigma$ に対しては， $F_b = \mathbb{C}^n$ とおき，これを自明な次数付けを持つベクトル空間とみなす． F_b を基点 b における標準ファイバーと呼ぼう．

定義 2.3. Σ 上のストークス局所系 $\mathcal{L}$ と，各 $b \in \beta$ におけるファイバー $\mathcal{L}_b, F_b$ の次数付きベクトル空間としての同型 $\varphi_b: F_b \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_b$ からなる組 $(\mathcal{L}, (\varphi_b))$ を枠付きストークス局所系という．

各 $b \in \beta$ に対し， F_b の次数付きベクトル空間としての自己同型全体を $H_b \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$ とし， $\mathbf{H} = \prod_{b \in \beta} H_b$ とおく．各 H_b は複素簡約群であり， $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{B}}(\Sigma, n)$ を Σ 上の枠付きストークス局所系の同型類全体とすると，これには枠の取り替えによって $\mathbf{H}$ が作用する．

有理型接続のリーマン・ヒルベルト対応（例えば [13] を参照）を我々のストークス局所系の言葉で言い換えると次のようになる：

定理 2.4. Σ が滑らかな複素射影代数曲線であるとき, α に特異点を持ち各 $i \in \alpha$ における不確定類が Q_i で与えられる Σ 上の階数 n の有理型接続の同型類と, $\widetilde{\mathcal{M}}_B(\Sigma, n)$ の $\mathbf{H}$ 軌道 (すなわち Σ 上のストークス局所系の同型類) の間に全単射がある.

2.2. 形式的モノドロミーと両側主等質空間

$(\mathcal{L}, (\varphi_b))$ を枠付きストークス局所系とする. 各 $b \in \beta$ を基点とする, ∂_b に沿った $\mathcal{L}$ のモノドロミーを考えよう. これを同型 φ_b で $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に移したものを M_b とおき (従って $\mathcal{L}$ のモノドロミーは $\varphi_b M_b \varphi_b^{-1} \in \mathrm{Aut} \mathcal{L}_b$ である), 枠付きストークス局所系の基点 b における形式的モノドロミーと呼ぶ. $b \in \beta \cap \pi^{-1}(\alpha)$ のとき, $i = \pi(b)$ とおき F_b が $(\mathcal{I}_i)_b$ 次数付きベクトル空間 $(\mathcal{L}_i)_b$ の基底を固定して得られたものであった事を思い出して, $P_b \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を $\mathcal{L}_i$ の基点 b におけるモノドロミーの (その基底に関する) 行列表現とすると,

$$P_b^{-1} M_b \in H_b$$

が成り立つ. 実際, σ を $(\mathcal{I}_i)_b$ の b を基点とするモノドロミーとすると, 各 $q \in (\mathcal{I}_i)_b$ に対し $\mathbb{C}^n$ の次数 q の斉次元は M_b によって次数 $\sigma(q)$ の斉次元に移り, その後 P_b^{-1} によって次数 q の斉次元に移る. よって M_b は剰余類

$$H(\partial_b) := P_b H_b = H_b P_b \subset G$$

に値を取る.

代数群 G の主等質空間とは, G が単純推移的に作用する代数多様体の事であった. G が左右両側から単純推移的に作用し, それらが互いに可換であるような代数多様体をここでは G の両側主等質空間と呼ぶ事にする. 次は明らかであろう:

命題 2.5. $H(\partial_b)$ は H_b の両側主等質空間である.

$b \in \beta \cap \partial\Sigma$ に対し $H(\partial_b) = G$ とおき,

$$\mathbf{H}(\partial) = \prod_{b \in \beta} H(\partial_b)$$

と定める. これは $\mathbf{H}$ の両側主等質空間である.

2.3. 基本亜群のストークス表現

$\Pi = \Pi_1(\tilde{\Sigma}, \beta)$ を $\tilde{\Sigma}$ の β を基点集合とする基本亜群, すなわち β の元を対象とし, $b, b' \in \beta$ に対し b から b' への道のホモトピー類を射 $b \rightarrow b'$ とする圏とし, Π から群 G への射全体を $\mathrm{Hom}(\Pi, G)$ と書く (ここでももちろん G は対象が1点のみからなる亜群とみなしている). 定義から $\mathrm{Hom}(\Pi, G)$ の元 ρ は, β の点を結ぶ道のホモトピー類全体から G への写像 $[\gamma] \mapsto \rho(\gamma)$ で, γ_1 の始点と γ_2 の終点が一致する限り

$$\rho(\gamma_1 \gamma_2) = \rho(\gamma_1) \rho(\gamma_2)$$

が成り立つようなものを指す.

各特異方向 $d \in \mathbb{A}_i$ に対し, λ_d を $\pi^{-1}(i)$ に沿って $b \in \beta \cap \pi^{-1}(i)$ から d へ向かう円弧とする. λ_d に沿った平行移動によって, $\mathcal{L}_i$ のストークス群 $\mathrm{Sto}_d \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{L}_i)_d$ を $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}_i)_b \simeq \mathrm{Aut} F_b = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分群と同一視する. また

$$\hat{\gamma}_d = \lambda_d^{-1} \circ \gamma_d \circ \lambda_d \in \Pi \quad (d \in \mathbb{A})$$

とおき, 各境界成分 ∂_b を b を基点とする閉曲線と与えられた向きによって同一視する.

定義 2.6. Π の n 次元ストークス表現とは, $\text{Hom}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$ の元 ρ で次の条件を満たすものをいう:

- (1) 各 $b \in \beta$ に対し $\rho(\partial_b) \in H(\partial_b)$ が成り立つ.
- (2) 各特異方向 $d \in \mathbb{A}$ に対し $\rho(\hat{\gamma}_d) \in \text{Sto}_d$ が成り立つ.

n 次元ストークス表現全体を $\text{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$ と表す.

$\text{Hom}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$ には群 $\text{GL}_n(\mathbb{C})^\beta$ が自然に作用する事に注意しよう. 具体的に書けば, $g = (g_b) \in G^\beta$, $\rho \in \text{Hom}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$ 及び道 $\gamma: b_1 \rightarrow b_2$ に対し

$$(g \cdot \rho)(\gamma) = g_{b_2} \rho(\gamma) g_{b_1}^{-1}$$

によって定義される. この作用を部分群 $\mathbf{H} \subset G^\beta$ に制限したものは, ストークス表現全体 $\text{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$ を保つ.

命題 2.7. モノドロミーを取る事により, $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{B}}(\Sigma, n)$ と $\text{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$ の間に $\mathbf{H}$ 同変な全単射が定まる. 特に, Σ 上のストークス局所系の同型類と $\text{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$ の $\mathbf{H}$ 軌道は 1 対 1 対応する.

$\text{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$ がアフィン代数多様体の構造を持つ事は明らかであろう.

定義 2.8. アフィン商

$$\mathcal{M}_{\mathbf{B}}(\Sigma, n) := \text{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C})) / \mathbf{H} = \text{Spec } \mathbb{C}[\text{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))]^{\mathbf{H}}$$

を (twisted) wild character variety と呼ぶ.

主結果の一つは次のように述べられる:

定理 2.9. $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}(\Sigma, n)$ はポアソン構造を持つ.

ここで最も基本的な場合にストークス表現の空間 $\text{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$ の代数多様体としての構造を見ておこう.

Σ として $\mathbb{C}$ 内の原点 0 を中心とする閉円板を取る. 原点における階数 n の不確定類 Q を固定し, 不確定曲線 $\Sigma = (\Sigma, \{0\}, Q)$ を考えよう. 付随する曲面 $\tilde{\Sigma}$ の境界 ∂ の連結成分は, Σ の境界 ∂_1 と有向実ブローアップして新たにできる境界 ∂_0 の二つである. それぞれの基点 $b_i \in \partial_i$ と Q に属す ∂_0 上の次数付き局所系 $\mathcal{L}$ を取り, それらを用いて標準ファイバー F_0, F_1 を定めれば, n 次元ストークス表現のなす空間

$$\mathcal{A}(Q) := \text{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$$

ができる.

補題 2.10. $\mathbf{H}$ 同変な同型

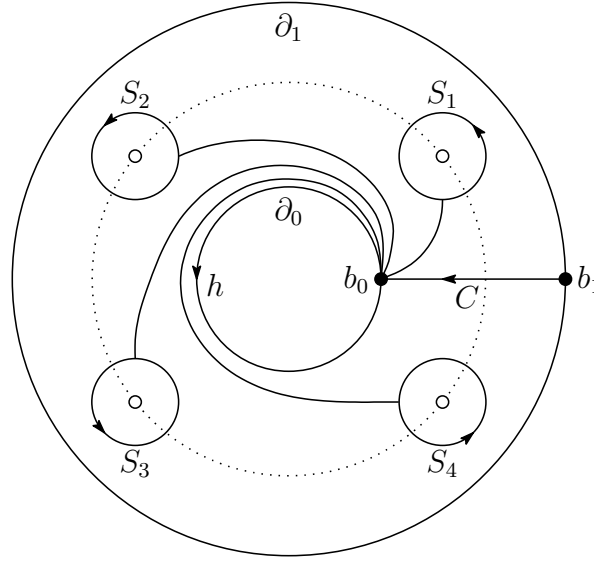
$$\mathcal{A}(Q) \simeq \text{GL}_n(\mathbb{C}) \times H(\partial_0) \times \prod_{d \in \mathbb{A}} \text{Sto}_d(Q)$$

が存在する. ただし $\mathbf{H} = \text{GL}_n(\mathbb{C}) \times H_0$ は右辺の空間に

$$(g, k) \cdot (C, h, (S_d)) = (kCg^{-1}, khk^{-1}, (kS_dk^{-1}))$$

で作用する.

これは、次の図（ $\#\mathbb{A} = 4$ の場合）のように Π を生成する道を取る事で直ちに示される。



3. 両側主等質空間に値を取る運動量写像

定理 2.9 は、不確定特異点が全て不分岐の場合に Boalch [2, 3, 4] によって示された。ここでの証明のアイディアは、Alekseev–Malkin–Meinrenken [1] によって導入された擬ハミルトン空間を用いる事であった。最初に述べた通り、擬ハミルトン空間はハミルトン空間の乗法的類似物であり、ハミルトン空間の運動量写像がリー環の双対空間に値を取る一方、擬ハミルトン空間の運動量写像は作用する群に値を取る。Boalch は、不分岐の場合に空間 $\text{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$ に擬ハミルトン $\mathbf{H}$ 空間の構造が定まり、その運動量写像は形式的モノドロミーの逆元で与えられる事を示した。

分岐不確定特異点がある場合には、先に述べたように形式的モノドロミーの住処が群 $\mathbf{H}$ ではなく両側主等質空間 $\mathbf{H}(\partial)$ である。そこで、擬ハミルトン空間の概念を運動量写像が両側主等質空間に値を取れるように拡張する事を考える。

3.1. 両側主等質空間と外部自己同型群

代数群 G とその自己同型群 $\text{Aut}(G)$ の半直積 $G \rtimes \text{Aut}(G)$ を考えよう。積は

$$(g, \phi)(h, \psi) = (g\phi(h), \phi\psi)$$

で与えられる。各 $\phi \in \text{Aut}(G)$ に対し

$$G(\phi) = \{ (g, \phi) \mid g \in G \} \subset G \rtimes \text{Aut}(G)$$

とおけば、これは埋め込み $G \hookrightarrow G \rtimes \text{Aut}(G)$ を通して G が両側から作用し、 G の両側主等質空間の構造を持つ。 $G(\phi)$ は G の右移動を ϕ でねじったものである。

$\mathbb{G}$ を任意の両側主等質空間としたとき、各 $x \in \mathbb{G}$ が定める同型写像 $G \rightarrow \mathbb{G}$, $g \mapsto gx$ の逆写像を簡単に $y \mapsto yx^{-1}$ と表し、同様に $g \mapsto xg$ の逆写像を $y \mapsto x^{-1}y$ と表す事にする、写像

$$\phi_x: G \rightarrow G; \quad g \mapsto xgx^{-1} = (xg)x^{-1}$$

は G の自己同型であり、これが代表する外部自己同型群 $\text{Out}(G) := \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ の元 $[\mathbb{G}]$ は x の取り方に依らない．対応 $\mathbb{G} \mapsto [\mathbb{G}]$ によって G の両側主等質空間の同型類と $\text{Out}(G)$ の元は 1 対 1 に対応し、 $\phi \mapsto G(\phi)$ が逆写像を誘導する．

$\text{Out}(G)$ の群演算に対応する両側主等質空間の演算は次のようにして与えられる．二つの両側主等質空間 $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ に対しその積 $\mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2$ は

$$\mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2 = \mathbb{G}_1 \times_G \mathbb{G}_2, \quad [x_1, x_2] = [x_1 g^{-1}, g x_2] \quad (g \in G)$$

と定義される．各 $[x_1, x_2] \in \mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2$ は $x_1 x_2$ と書かれ x_1, x_2 の積と呼ばれる．また両側主等質空間 $\mathbb{G}$ に対し、そのコピー $\{x^{-1} \mid x \in \mathbb{G}\}$ に G を

$$g x^{-1} = (x g^{-1})^{-1}, \quad x^{-1} g = (g^{-1} x)^{-1} \quad (x \in \mathbb{G}, g \in G)$$

によって作用させたものを $\mathbb{G}^{-1}$ と書く事にすれば、 G の両側主等質空間の自然な同型

$$\mathbb{G} \cdot \mathbb{G}^{-1} \simeq \mathbb{G}^{-1} \cdot \mathbb{G} \simeq G$$

がある ($x x^{-1}, x^{-1} x$ ($x \in \mathbb{G}$) が G の単位元に対応する)．各 $x^{-1} \in \mathbb{G}^{-1}$ を $x \in \mathbb{G}$ の逆元と呼ぶ．

G の両側主等質空間 $\mathbb{G}$ への G 作用 $x \xrightarrow{g} g x g^{-1}$ を $\mathbb{G}$ における共役作用と呼ぶ． $\mathbb{G} = G(\phi)$ のとき、点 $x = (u, \phi) \in G(\phi)$ の $g \in G$ による共役は

$$(g, 1)(u, \phi)(g^{-1}, 1) = (g u \phi(g)^{-1}, \phi)$$

で与えられる． G の自身への作用 $u \mapsto g u \phi(g)^{-1}$ はねじれ共役作用等と呼ばれ、 G が複素単純代数群の場合等に詳しく調べられている（例えば [11] を参照）．

3.2. 両側主等質空間に値を取る運動量写像

以降 G を（連結）複素簡約代数群とし、そのリー環 $\mathfrak{g}$ 上の随伴作用不変な非退化対称双線形形式 $(\cdot, \cdot)$ を固定する． G の両側主等質空間は対応する $\text{Out}(G)$ の元が $(\cdot, \cdot)$ を保つもののみを考える．

G の両側主等質空間 $\mathbb{G}$ が与えられたとき、 G のモーレー・カルタン形式の類似物である $\mathbb{G}$ 上の左不変 $\mathfrak{g}$ 値 1 次微分形式 θ 、右不変 $\mathfrak{g}$ 値 1 次微分形式 $\bar{\theta}$ が

$$\theta_x(X) = x^{-1} X, \quad \bar{\theta}_x = X x^{-1} \quad (x \in \mathbb{G}, X \in T_x \mathbb{G})$$

によって定まる．ここで例えば $x^{-1} X \in \mathfrak{g}$ は写像 $\mathbb{G} \rightarrow G, y \mapsto x^{-1} y$ の X 微分である．これらを $\mathbb{G}$ 上のモーレー・カルタン形式と呼ぶ事にする．

定義 3.1. G が作用する滑らかな複素代数多様体 M が

- M 上の G 不変 2 次微分形式 ω ,
- G のある両側主等質空間 $\mathbb{G}$ への（共役作用に関し） G 同変な射 $\mu: M \rightarrow \mathbb{G}$

を備え、次の条件を満たすとき、 M を（ねじれ）擬ハミルトン G 空間と呼び、 μ をその運動量写像と呼ぶ．

$$(QH1) \quad d\omega = \frac{1}{12} \mu^*(\theta, [\theta, \theta]).$$

(QH2) $\omega(v_X, \cdot) = \mu^*(\theta + \bar{\theta}, X)$ ($X \in \mathfrak{g}$). ここで $v_X|_p = \frac{d}{dt}(e^{-tX} \cdot p)|_{t=0}$ ($p \in M$).

(QH3) $\text{Ker } \omega_p \cap \text{Ker}(d\mu)_p = \{0\}$ ($p \in M$).

$\mathbb{G} \simeq G$ のとき, M は Alekseev–Malkin–Meinrenken の意味の擬ハミルトン G 空間である. 従って上の定義は彼らのそれを運動量写像が一般の両側主等質空間に値を取るように拡張したものといえる. なお我々がこれを導入した直後, G がコンパクトリー群, M が可微分多様体の場合にほぼ同じ概念を Meinrenken [10] も導入している.

G の余随伴軌道がハミルトン G 空間の構造を持つ事の乗法的類似として, G の共役類には包含写像を運動量写像とする擬ハミルトン G 空間の構造が入る事がよく知られている. この事実は次のように拡張される.

例 3.2. G の両側主等質空間 $\mathbb{G}$ の任意の共役類 (共役作用に関する軌道) $\mathcal{C} \subset \mathbb{G}$ は, 包含写像 $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{G}$ を運動量写像とする擬ハミルトン G 空間の構造を持つ. 微分形式 ω は次式で与えられる:

$$\omega_x(v_X, v_Y) = \frac{1}{2}(X, \text{Ad}_x Y) - \frac{1}{2}(Y, \text{Ad}_x X) \quad (x \in \mathcal{C}, X, Y \in \mathfrak{g}).$$

ここで $\text{Ad}_x: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は x が定める G の自己同型 ϕ_x の単位元における微分である.

更に, 任意の両側主等質空間 $\mathbb{G}$ (特に G) も擬ハミルトン $G \times G$ 空間の構造を持つ事が次のようにして分かる.

例 3.3. $\mathbb{G}$ を G の両側主等質空間とする. $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ に $G \times G$ の両側主等質空間としての構造を

$$(g_1, g_2)(x, y) = (g_1 x, g_2 y), \quad (x, y)(g_1, g_2) = (x g_1, y g_2)$$

によって入れたものを $\mathbb{H}$ とすると, 対角集合 $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{G}\} \simeq \mathbb{G}$ は $\mathbb{H}$ の共役類である. よって G の任意の両側主等質空間 $\mathbb{G}$ は擬ハミルトン $G \times G$ 空間の構造を持つ. なお $G \times G$ の $\mathbb{G}$ への作用は $(g_1, g_2) \cdot x = g_1 x g_2^{-1}$ で与えられる.

元々の擬ハミルトン G 空間について知られている事柄の多くは主等質空間に値を取る場合に拡張される. 代表的なものを挙げておこう:

(1) アフィン代数多様体である擬ハミルトン G 空間 M に対し, そのアフィン商 $M/G = \text{Spec } \mathbb{C}[M]^G$ にポアソン構造が定まる.

(2) $\mathbb{G}, \mathbb{H}$ をそれぞれ複素簡約群 G, H の両側主等質空間とし, M を擬ハミルトン $G \times H$ 空間でその運動量写像を

$$(\mu_G, \mu_H): M \rightarrow \mathbb{G} \times \mathbb{H}$$

とする. また $\mathcal{C} \subset \mathbb{G}$ を共役類とする. もし $\mu_G^{-1}(\mathcal{C})$ に G が自由に作用し幾何的商 $M//_{\mathcal{C}} G := \mu_G^{-1}(\mathcal{C})/G$ が代数多様体として存在すれば, $M//_{\mathcal{C}} G$ に擬ハミルトン H 空間の構造が定まる. これを M の $\mathcal{C}$ に沿った擬ハミルトン簡約と呼ぶ. なお $\mathbb{G} = G, \mathcal{C} = \{1\}$ の場合はこれを単に $M//G$ と書く.

(3) $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ を G の両側主等質空間とし, $\mathbb{H}$ を別の複素簡約群 H の両側主等質空間とする. 自明な方法で $\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2 \times \mathbb{H}$ を $G \times G \times H$ の両側主等質空間とみなす. M を運動量写像

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_H): M \rightarrow \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2 \times \mathbb{H}$$

を持つ擬ハミルトン $G \times G \times H$ 空間とすると, G の対角作用と H の作用に関して M に

$$(\mu_1 \cdot \mu_2, \mu_H): M \rightarrow \mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2 \times \mathbb{H}$$

を運動量写像とする擬ハミルトン $G \times H$ 空間の構造が定まる. その微分形式 ω_{diag} は, 元の微分形式 ω から次のようにして得られる:

$$\omega_{\text{diag}} = \omega - \frac{1}{2}(\mu_1^* \theta, \mu_2^* \bar{\theta}).$$

特に $i = 1, 2$ に対し, $\mathbb{H}_i$ を複素簡約群 H_i の両側主等質空間, M_i を $\mathbb{G}_i \times \mathbb{H}_i$ 値運動量写像を持つ擬ハミルトン $G \times H_i$ 空間とすると, 直積 $M_1 \times M_2$ は自然に擬ハミルトン $G \times G \times H_1 \times H_2$ 空間の構造を持つため, 今述べた方法により, $M_1 \times M_2$ に $(\mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2 \times \mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_2$ 値運動量写像を持つ) 擬ハミルトン $G \times H_1 \times H_2$ 空間の構造が定まる. これを $M_1 \otimes M_2$ と書き M_1 と M_2 のフュージョンと呼ぶ.

(4) 上で $\mathbb{G}_2 = \mathbb{G}_1^{-1}$ の場合, 擬ハミルトン簡約 $M_1 \underset{G}{\bowtie} M_2 := (M_1 \otimes M_2) // G$ が存在すればそれを M_1 と M_2 の貼りあわせと呼ぶ. 例えば (2) の状況で $\mathcal{C}^{-1} \subset \mathbb{G}^{-1}$ を $\mathcal{C}$ の元の逆元からなる共役類とすると, $M \underset{G}{\bowtie} \mathcal{C}^{-1} \simeq M //_{\mathcal{C}} G$ である.

例 3.4. $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ を G の両側主等質空間とする. 前の例で述べた方法で $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2^{-1}$ に擬ハミルトン $G \times G$ 空間の構造を入れ, それらのフュージョン $\mathbf{D}(\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2) := \mathbb{G}_1 \otimes \mathbb{G}_2^{-1}$ を考えると, この運動量写像は $\mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2 \times \mathbb{G}_1^{-1} \cdot \mathbb{G}_2^{-1}$ に値を取ると考えて良い事が分かる. 実際, $\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_1$ に前の例で述べた方法で両側主等質空間の構造を入れたものを $\mathbb{H}_1$ とし, 同様の方法で $\mathbb{G}_2^{-1}$ から得られるものを $\mathbb{H}_2$ とすると, 両側主等質空間の同型

$$\mathbb{H}_1 \cdot \mathbb{H}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2 \times \mathbb{G}_1^{-1} \cdot \mathbb{G}_2^{-1}; \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2^{-1}, y_2^{-1}) \mapsto (x_1 y_2, y_1^{-1} x_2^{-1})$$

が得られる. このとき運動量写像は

$$\mathbb{G}_1 \otimes \mathbb{G}_2^{-1} \rightarrow \mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2 \times \mathbb{G}_1^{-1} \cdot \mathbb{G}_2^{-1}; \quad (x_1, x_2^{-1}) \mapsto (x_1 x_2, x_1^{-1} x_2^{-1})$$

で与えられる. これは G のダブルと呼ばれる擬ハミルトン $G \times G$ 空間 $\mathbf{D}(G) := G \times G$ の一般化である. 更に (3) で述べた方法により, G の対角作用に関し $\mathbf{D}(\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2)$ に擬ハミルトン G 空間の構造を入れたものを $\mathbb{D}(\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2)$ と書く. この運動量写像は $\mathbb{G}_1$ と $\mathbb{G}_2$ の「交換子」 $\mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2 \cdot \mathbb{G}_1^{-1} \cdot \mathbb{G}_2^{-1}$ に値を取る.

4. 主定理と一般化

定理 2.9 は, 次の主定理の系として得られる:

定理 4.1. ストークス表現の空間 $\text{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$ は滑らかなアフィン代数多様体で, 形式的モノドロミーの逆元を取る写像

$$\mu: \text{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbf{H}(\partial)^{-1}; \quad \rho \mapsto (\rho(\partial_b)^{-1})_{b \in \beta}$$

を運動量写像とする擬ハミルトン $\mathbf{H}$ 空間の構造を持つ.

特に, 補題 2.10 で扱った $\mathcal{A}(Q)$ に擬ハミルトン空間の構造が定まる. 実は一般の場合はフュージョンを用いて

$$\text{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \text{GL}_n(\mathbb{C})) \simeq \mathcal{A}(Q_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}(Q_m) \otimes \mathbb{D}(G, G)^{\otimes g} // \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

と表される. ただし $m = \#\beta$, かつ $i \in \beta \setminus \alpha$ に対し Q_i は自明な (すなわち確定特異点型の) 不確定類である.

4.1. Twisted fission spaces

補題 2.10 で扱った $\mathcal{A}(Q)$ に擬ハミルトン空間の構造が定まる事を示せば、定理 4.1 の主張が従う。実は $\mathcal{A}(Q)$ 自身も、より基本的な擬ハミルトン空間 (fission space) をいくつか貼り合わせて得られる。

G を複素簡約群とする。次のようなデータが与えられたとしよう：

- G のある放物型部分群のレヴィ部分群 H .
- H 共役で保たれる G の冪単部分群 U_i , $i = 1, 2, \dots, s$.
- G の主等質空間 $\mathbb{G}$.
- $H \times H$ 不変部分多様体 $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ でそれ自身が H の主等質空間となるもの.

このとき

$$U_{is+j} = \mathbb{H}^{-i} U_j \mathbb{H}^i \subset G \quad (i \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \dots, s)$$

とおくと、全ての U_j , $j \in \mathbb{Z}$ は H 共役で保たれる冪単部分群である。

今 $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対し次が成り立つと仮定しよう：

- (1) $U_{j+2l} = U_j$.
- (2) 部分群 $U_{j+1}, U_{j+2}, \dots, U_{j+l}$ は、 H をレヴィ部分群とするある放物型部分群 P_+ の冪単根基 U_+ に含まれ、かつ積を取る写像

$$U_{j+l} \times \cdots \times U_{j+2} \times U_{j+1} \rightarrow U_+; \quad (S_{j+l}, \dots, S_{j+2}, S_{j+1}) \mapsto S_{j+l} \cdots S_{j+2} S_{j+1}$$

は代数多様体としての同型である。また $U_{j+l+1}, \dots, U_{j+2l}$ は P_+ と opposite な放物型部分群 P_- の冪単根基 U_- に含まれ、これについても同様の事が成り立つ。

このとき

$$\mathcal{A} = G \times \mathbb{H} \times \prod_{i=1}^s U_i$$

とおき、群 $G \times H$ を $\mathcal{A}$ に

$$(g, k) \cdot (C, h, (S_i)) = (kCg^{-1}, khk^{-1}, (kS_ik^{-1}))$$

によって作用させ、また $G \times H$ 同変な写像 $\mu = (\mu_G, \mu_H): \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{G} \times \mathbb{H}^{-1}$ を

$$\mu_G(C, h, (S_i)) = C^{-1}hS_s \cdots S_1C, \quad \mu_H(C, h, (S_i)) = h^{-1}$$

と定める。更に $\mathcal{A}$ 上の微分形式 ω を

$$2\omega = (C^*\bar{\theta}, \text{Ad}_b C^*\bar{\theta}) + (C^*\bar{\theta}, b^*\bar{\theta}_{\mathbb{G}}) + (C_s^*\bar{\theta}, h^*\theta_{\mathbb{H}}) - \sum_{i=1}^s (C_i^*\theta, C_{i-1}^*\theta).$$

と定義する。ただし $\theta, \bar{\theta}$ は G 上のモーレー・カルタン形式、 $\bar{\theta}_{\mathbb{G}}, \theta_{\mathbb{H}}$ は $\mathbb{G}, \mathbb{H}$ 上のモーレー・カルタン形式（上線が付いたものは右不変）で、

$$C_i = S_i \cdots S_2 S_1 C: \mathcal{A} \rightarrow G, \quad b = hS_s \cdots S_2 S_1: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{G}$$

とおいた。

補題 4.2. $(\mathcal{A}, \omega, \mu)$ は擬ハミルトン $G \times H$ 空間である.

このようにして得られる擬ハミルトン空間 $\mathcal{A}$ を (twisted) fission space と呼ぶ. 空間 $\mathcal{A}(Q)$ は, 複素簡約群の包含列

$$H_0 = K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_r \subset K_{r+1} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

各 K_i の両側主等質空間

$$H(\partial_0) = \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_{r+1} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

及び運動量写像が $\mathbb{K}_{i+1} \times \mathbb{K}_i^{-1}$ に値を取る擬ハミルトン $K_{i+1} \times K_i$ 空間の構造を備えた fission space $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2, \dots, r$ を適当に取れば

$$\mathcal{A}(Q) \simeq \mathcal{A}_1 \underset{K_2}{\times} \mathcal{A}_2 \underset{K_3}{\times} \cdots \underset{K_r}{\times} \mathcal{A}_r$$

と表す事ができる. この $\mathcal{A}(Q)$ の fission space による分解は, ストークス群のレベル分解 ([4, 8, 9] 参照)

$$\mathrm{Sto}_d \simeq \mathrm{Sto}_d(k_1) \times \mathrm{Sto}_d(k_2) \times \cdots \times \mathrm{Sto}_d(k_r)$$

に付随して起こる. ここで $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ は $\mathrm{End} \mathcal{L}_d$ 内に非自明な斉次元を持つ次数 q 達のレベルを並べたものであり, $\mathrm{Sto}_d(k)$ は, $\mathrm{lev}(q) = k$ を満たす全ての POM q に渡る $(\mathrm{End} \mathcal{L}_d)_q$ の直和をリー環とする Sto_d の連結閉部分群である. 各 $\mathcal{A}_i$ を構成する冪単部分群 U_j , $j = 1, 2, \dots, s$ は $\mathrm{Sto}_d(k_i)$, $d \in \mathbb{A}$ で与えられる.

4.2. 構造群の一般化

これまでの話は全て接続の構造群が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の場合を扱っていたが, [5] では一般の複素簡約群 G を構造群とするストークス局所系を導入し, そのモジュライ空間 $\mathcal{M}_B(\Sigma, G)$ に関してもポアソン構造の構成を行っている. これについて少し述べる.

定理 1.1 は複素簡約構造群の場合へ次のように一般化される. まず複素 n 次元ベクトル空間と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の主等質空間¹ の間に対応がある事を思い出そう. 実際, W が n 次元ベクトル空間であれば, $\mathbb{C}^n$ から W への線形同型全体 $\mathbb{G}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の主等質空間であり, 逆に主等質空間 $\mathbb{G}$ に対し, $W = \mathbb{G} \times_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \mathbb{C}^n$ は n 次元ベクトル空間の構造を持つ. この対応の下で $\mathrm{GL}(W)$ と主等質空間の自己同型群 $\mathrm{Aut} \mathbb{G}$ は自然に同型になる. 次にベクトル空間 W の有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群 X による次数付けと, X を指標格子とするトーラス $T_X = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{C}^\times)$ の W への作用が対応する事を思い出して, $\mathbb{Z}$ 加群 Q を「指標格子」とする副トーラス T_Q を考える (Q は有限生成でない事に注意しよう). なおこの副トーラスは [9] にも現れる. Q のモノドロミー自己同型 σ は T_Q の自己同型 σ を誘導する. よって定理 1.1 にある対 (W, M_W) は,

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の主等質空間 $\mathbb{G}$,
- $\mathbb{G}$ の自己同型 $M \in \mathrm{Aut} \mathbb{G}$,
- 群準同型 $\varphi: T_Q \rightarrow \mathrm{Aut} \mathbb{G}$ で, Q のある有限生成部分自由 $\mathbb{Z}$ 加群 X を指標格子とするトーラス T_X への自然な全射 $T_Q \twoheadrightarrow T_X$ と代数群の射 $T_X \rightarrow \mathrm{Aut} \mathbb{G}$ の合成として表されるようなもの

¹特に断らない限り主等質空間の作用は右作用であると約束する.

からなる三つ組で、任意の $t \in T_Q$ に対し $\varphi(\sigma(t)) = M\varphi(t)M^{-1}$ を満たすものと対応する．この三つ組は一般の複素簡約構造群 G の場合に直ちに拡張され、そのようなものの圏と $\text{Spec } \mathbb{C}((z))$ 上の G 接続の圏は同値になる．

G 局所系とは、 G の主等質空間をファイバーとする局所系の事であった．上の三つ組の定義を基にすれば、円 ∂ 上の I 次数付き G 局所系の概念を定義する事は容易である．不確定類、ストークス群といった概念も自然に拡張され、それらを用いて不確定曲線上のストークス G 局所系や、付随する基本亜群 Π のストークス表現の空間 $\text{Hom}_S(\Pi, G)$ が定義される．定理 4.1 はその場合でも正しい．

4.3. 構造群のねじれ

[5] では、更に複素簡約構造群が局所定数で動く状況を扱っている．すなわち、複素簡約群 G を固定して、ファイバーが G と同型な代数群の局所系 $\mathcal{G}$ を取り、各点におけるファイバーがその点における $\mathcal{G}$ のファイバーの主等質空間であるような局所系 ($\mathcal{G}$ 局所系) を G 局所系の代わりに用いるのである． $\mathcal{G}$ 局所系のある点 b を基点とする閉曲線に沿ったモノドロミーの住処は、 $\mathcal{G}$ 自身のモノドロミーを $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{G}_b)$ としたとき両側主等質空間 $\mathcal{G}_b(\phi)$ と同一視される．この場合にも不確定類や不確定曲線、その上のストークス $\mathcal{G}$ 局所系といった概念が定義される．またストークス表現の空間も $\text{Hom}(\Pi, G \rtimes \text{Aut}(G))$ のある部分集合として定義され、定理 4.1 も拡張される．

参考文献

- [1] A. Alekseev, A. Malkin, and E. Meinrenken, *Lie group valued moment maps*, J. Differential Geom. **48** (1998), no. 3, 445–495.
- [2] P. Boalch, *Quasi-Hamiltonian geometry of meromorphic connections*, Duke Math. J. **139** (2007), no. 2, 369–405.
- [3] ———, *Through the analytic Halo: fission via irregular singularities*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), no. 7, 2669–2684.
- [4] ———, *Geometry and braiding of Stokes data; fission and wild character varieties*, Ann. of Math. (2) **179** (2014), no. 1, 301–365.
- [5] P. Boalch and D. Yamakawa, *Twisted wild character varieties*, arXiv:1512.08091.
- [6] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics **163**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [7] M. Hukuhara, *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires. II*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. **5** (1937), no. 3-4, 123–166.
- [8] M. Loday-Richaud, *Stokes phenomenon, multisummability and differential Galois groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **44** (1994), no. 3, 849–906.
- [9] J. Martinet and J.-P. Ramis, *Elementary acceleration and multisummability. I*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **54** (1991), no. 4, 331–401.
- [10] E. Meinrenken, *Convexity for twisted conjugation*, arXiv:1512.09000.
- [11] T. A. Springer, *Twisted conjugacy in simply connected groups*, Transform. Groups **11** (2006), no. 3, 539–545.
- [12] H. L. Turrittin, *Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point*, Acta Math. **93** (1955), 27–66.
- [13] M. van der Put and M.-H. Saito, *Moduli spaces for linear differential equations and the Painlevé equations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), no. 7, 2611–2667.
- [14] M. van der Put and M. F. Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **328**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.