

微分方程式 レポート課題 2015/09/28(月) 解答 (概要)

担当教員: 江夏 洋一 (A205 教室, 16:20-17:50)

1. 次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ ($= \frac{df(x)}{dx}$) を求めよ.

$$(1) f(x) = \cos x + x \sin 3x \quad (2) f(x) = e^{-3x} + xe^{-3x} \quad (3) f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(4) f(x) = \cos^{-1} x \quad (5) f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$$

2. 次の関数 $f(x)$ の原始関数 $\int f(x) dx$ を求めよ.

$$(1) f(x) = \cos x + x \sin 3x \quad (2) f(x) = e^{-3x} + xe^{-3x} \quad (3) f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(4) f(x) = \cos^{-1} x \quad (5) f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$$

3. 任意の定数 C_1, C_2 に対して, 関数 $y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y(x) = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$ が次の式:

$$y'' + ky = 0 \tag{*}$$

を満たすような実数 k の値を求めよ.

4. 任意の定数 C_1, C_2 に対して, 関数 $y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$ が次の式:

$$y'' + ky = 0 \tag{**}$$

を満たすような実数 k の値を求めよ.

1.

(1) $f'(x) = -\sin x + \sin 3x + 3x \cos 3x$. (2) $f'(x) = -3e^{-3x} + (e^{-3x} - 3xe^{-3x}) = -(3x+2)e^{-3x}$.

(3) $f'(x) = x'(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x((1-x^2)^{-\frac{1}{2}})' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x(-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x))$
 $= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x(x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\{(1-x^2) + x^2\} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$.

(4) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (5) $f'(x) = (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2})' = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$ (あるいは $-\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}, -\frac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2}$).

2. C を任意定数とする.

(1) 部分積分を用いると, $\int f(x) dx = \sin x + \int x(-\frac{1}{3} \cos 3x)' dx = \sin x + \{x(-\frac{1}{3} \cos 3x) - \int(-\frac{1}{3} \cos 3x) dx\}$.
 したがって, $\int f(x) dx = \sin x - \frac{1}{3}x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C$.

(2) 部分積分を用いると, $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + \int x(-\frac{1}{3}e^{-3x})' dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + \{x(-\frac{1}{3}e^{-3x}) - \int(-\frac{1}{3}e^{-3x}) dx\}$.
 したがって, $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} - \frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C = -(\frac{1}{3}x + \frac{4}{9})e^{-3x} + C$.

(3) $x = \cos t$ ($0 < t < \pi$) とおくと, $f(x(t)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = \frac{\cos t}{\sin t}$ かつ $\frac{dx}{dt} = -\sin t$.
 したがって, $\int f(x) dx = \int f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{\cos t}{\sin t} (-\sin t) dt = -\int \cos t dt = -\sin t + C = -\sqrt{1-x^2} + C$.

(4) 部分積分を用いると, $\int f(x) dx = \int (x)' \cos^{-1} x dx = x \cos^{-1} x - \int x(\cos^{-1} x)' dx = x \cos^{-1} x - \int x(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) dx$.
 したがって, $\int f(x) dx = x \cos^{-1} x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$.

(5) $\int f(x) dx = \int (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}) dx = \log|x+1| - \log|x+2| + C = \log|\frac{x+1}{x+2}| + C$.

3. $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$ を (*) 式に代入すると, $C_1(k-16) \cos 4x + C_2(k-16) \sin 4x = 0$. したがって, $k = 16$.

4. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$ を (**) 式に代入すると, $C_1(k+16)e^{4x} + C_2(k+16)e^{-4x} = 0$. したがって, $k = -16$.