微分方程式 第 11 回小テスト問題と解答

出題日：2015/12/14(月)

担当教員：江夏 洋一 (A205 教室，16:20-17:50)

1． 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，$' = \dfrac{d}{dx}$ である．

(1) $y' = \sin y$　　(2) $y' = xe^{-(x^2+y)}$　　(3) $y' - 3y = x$

(4) $y'' + 6y' - 7y = 0$　　(5) $y'' + 6y' + 9y = 0$　　(6) $y'' + 6y' + 13y = 0$

解答． (1) $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{Ce^{2x}+1} - 1\right)$ あるいは $y = 2\tan^{-1}(Ce^x)$ (C は任意定数)，(2) $y = \log\left(C - \dfrac{1}{2}e^{-x^2}\right)$ (C は任意定数) (3) $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9} + Ce^{3x}$ あるいは $y = \left\{\left(-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}\right)e^{-3x} + C\right\}e^{3x}$ (C は任意定数)，(4) $y = Ae^x + Be^{-7x}$ (A, B は任意定数) (5) $y = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}$ (A, B は任意定数)，(6) $y = Ae^{-3x}\cos 2x + Be^{-3x}\sin 2x$ (A, B は任意定数)

2． 次の初期値問題を解け．ただし，$' = \dfrac{d}{dx}$ である．

$$(1)\ \begin{cases} y' - 3y = x \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} y'' + 6y' - 7y = 0 \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

解答． (1) $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9}e^{3x}$ あるいは $y = \left\{\left(-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}\right)e^{-3x} + \dfrac{1}{9}\right\}e^{3x}$，(2) $y = \dfrac{13}{4}e^x - \dfrac{1}{4}e^{-7x}$

3． 次の正方行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

解答． (1) A の固有値 λ は $\lambda = -1, 4$ であり，

(i) $\lambda = -1$ に属する A の固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\left(あるいは，\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} など\right)$

(ii) $\lambda = 4$ に属する A の固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\left(あるいは，\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} など\right)$

(2) A の固有値 λ は $\lambda = \sqrt{2} \pm 1$ ($\lambda = \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1$) であり，

(i) $\lambda = \sqrt{2} + 1$ に属する A の固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\left(あるいは，\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} など\right)$

(ii) $\lambda = \sqrt{2} - 1$ に属する A の固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$．

4． 次の問に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，行列 A の指数関数 e^{xA} を求めよ．

(2) 2 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ を未知関数とする連立微分方程式：

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}$$

の一般解を求めよ．

解答． (1) $e^{xA} = I + xA + \dfrac{x^2}{2}A^2 + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}A^n + \cdots$ より，$e^{xA} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{-x} + 2e^{4x} & -2e^{-x} + 2e^{4x} \\ -3e^{-x} + 3e^{4x} & 2e^{-x} + 3e^{4x} \end{pmatrix}$．

(2) $\boldsymbol{y} = e^{xA}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\left\{C_1\begin{pmatrix} 3e^{-x} + 2e^{4x} \\ -3e^{-x} + 3e^{4x} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -2e^{-x} + 2e^{4x} \\ 2e^{-x} + 3e^{4x} \end{pmatrix}\right\}$ (C_1, C_2 は任意定数)．