微分方程式　補足　2016/01/18(月)

担当教員：江夏 洋一 (A205 教室，16:20-17:50)

§5.5.6. 2 階線形微分方程式の一般解の分類のまとめ (p.152)

定義 (解の基本系). 次の 2 階線形微分方程式：

$$y'' + py' + qy = 0, \quad ' = \frac{d}{dx} \tag{$*$}$$

の一般解は二つの **1 次独立 (線形独立)** な関数 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ を用いて

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}) \tag{$**$}$$

と書ける．このとき，φ_1, φ_2 を $(*)$ 式の**解の基本系**という．ただし，p, $q \in \mathbf{R}$ は定数である．

注意. $(**)$ 式を $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ の 1 次結合 (線形結合) という (p.146-149).

	p, q の値	特性方程式	解の基本系 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$	一般解 y (C_1, C_2：任意定数)
(1)	$p=4,\ q=-5$	$\lambda^2+4\lambda-5=0$ $\iff (\lambda-1)(\lambda+5)=0$	$\varphi_1(x)=\underline{e^x}$, $\varphi_2(x)=\underline{\underline{e^{-5x}}}$	$y=C_1\underline{e^x}+C_2\underline{\underline{e^{-5x}}}$
(2)	$p=4,\ q=4$	$\lambda^2+4\lambda+4=0$ $\iff (\lambda+2)^2=0$	$\varphi_1(x)=$ ＿＿, $\varphi_2(x)=$ ＿＿	$y=C_1$＿＿$+C_2$＿＿
(3)	$p=4,\ q=13$	$\lambda^2+4\lambda+13=0$ $\iff (\lambda+2)^2+3^2=0$	$\varphi_1(x)=$ ＿＿, $\varphi_2(x)=$ ＿＿	$y=C_1$＿＿$+C_2$＿＿

定義 (1 次独立, 1 次従属). ベクトル値関数 $\boldsymbol{u}_1(x)$, $\ldots$, $\boldsymbol{u}_m(x) \in \mathbf{R}^n$ $(x \in \mathbf{R})$ が **1 次独立 (線形独立)** であるとは,

$(*)$

が成り立つことである．また，$\boldsymbol{u}_1(x)$, $\ldots$, $\boldsymbol{u}_m(x)$ が 1 次独立でないとき，それらは **1 次従属 (線形従属)** であるという．

例 $(m=2,\ n=1)$**.** 次のことが成り立つ ($n=1$ より，$\boldsymbol{u}_1(x)=u_1(x)$, $\boldsymbol{u}_2(x)=u_2(x)$ はスカラーである).

(i) $u_1(x)=e^x$, $u_2(x)=e^{-5x}$ は **1 次独立**である．

証明.

(ii) $u_1(x)=\cos x$, $u_2(x)=\sin x$ は **1 次独立**である．

証明. (i) と同様に示される [**各自で示そう**].

(iii) $u_1(x)=7x$, $u_2(x)=-9x$ は **1 次従属**である．

証明.