微分方程式 第 2 回レポート課題と解答

出題日: 2015/10/05(月)

担当教員: 江夏 洋一 (A205 教室, 16:20-17:50)

1. 次の変数分離形微分方程式を解け．ただし，$' = \dfrac{d}{dx}$ である．

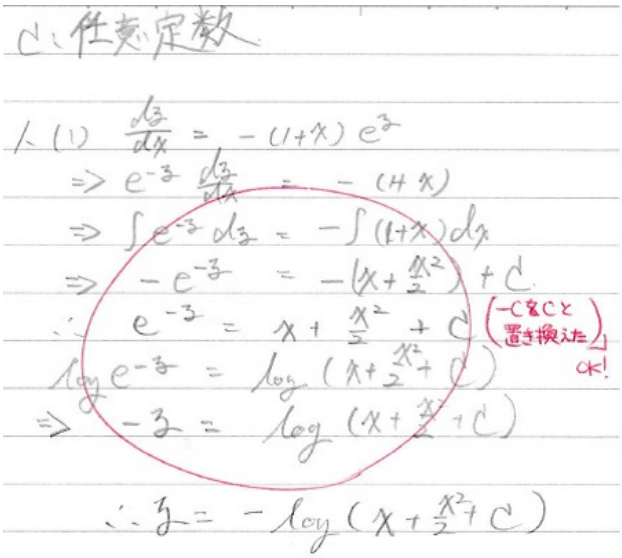
$$(1)\ y' = -(1+x)e^{y} \qquad\qquad (2)\ y' = e^{-(x+y)}$$

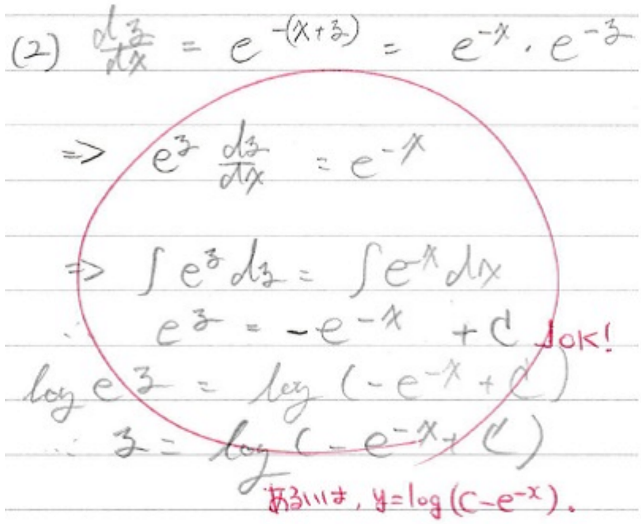
解答 (概要)． はじめに，$f_1(x) = -(1+x)$, $g_1(y) = e^{y}$ および $f_2(x) = e^{-x}$, $g_2(y) = e^{-y}$ とおくと，

$$(1) \iff y' = \underline{f_1(x)}\,\underline{g_1(y)}, \longleftarrow \underline{(x\ \text{だけの関数})} \times \underline{(y\ \text{だけの関数})}$$

$$(2) \iff y' = \underline{f_2(x)}\,\underline{g_2(y)} \quad \longleftarrow \underline{(x\ \text{だけの関数})} \times \underline{(y\ \text{だけの関数})}$$

と書けるので，微分方程式 $y' = -(1+x)e^{y}$, $y' = e^{-(x+y)}$ はいずれも変数分離形である．





講評および注意． (1) $y = -\log\left(x + \dfrac{x^2}{2} + C\right)$ に加えて，次の一般解：

$$y = -\log\left\{x\left(1+\frac{x}{2}\right)+C\right\},\ \text{あるいは}\ y = -\log\left\{\frac{1}{2}(1+x)^2 + C\right\}$$

も正答であるが，任意定数 C を対数項の外側に出して書かれた解 $y = -\log\{x(1+\frac{x}{2})\}+C$ や $y = -\log(x+\frac{x^2}{2})+C$ は<u>誤りである</u> (実数 $a, b > 0$ に対して $\log(ab) = \log a + \log b$ は成り立つが，$\log(a+b) = \log a + \log b$ は一般に<u>成り立たない</u>)．また，任意定数 $-C$ を C と置き換えて得られる次の等式：

$$e^{-y} = x + \frac{x^2}{2} + C$$

の両辺の対数をとる際，

$$-y = \log\left(x + \frac{x^2}{2} + C\right) \quad \text{ではなく，} -y = \log\left|x + \frac{x^2}{2} + C\right|$$

といった形で，括弧ではなく絶対値を用いてしまう誤答も見られた．

(2) 変数分離形の方法による，$e^{y} = -e^{-x} + C$ までの導出は大変良く出来ていた．しかし,「等式 $e^{y} = -e^{-x} + C$ の両辺の対数をとると，$y = -(-x) + C$，すなわち，$y = x + C$」とする解法も見られた．この解法も，注意 (1) と同様の理由によって<u>誤りである</u>．

2. 次の問いに答えよ.

(1) 等式 $\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{a}{y} + \dfrac{b}{1-y}$ $(y \neq 0$ かつ $y \neq 1)$ を満たす定数 a, b を求めよ **(部分分数分解)**.

(2) 次の初期値問題：

$$\begin{cases} y' = y(1-y) & \cdots ① \\ y(0) = \dfrac{2}{3} & \cdots ② \end{cases} \qquad (*)$$

を解け. ただし, $' = \dfrac{d}{dx}$ である.

解答 (概要). (1) $\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{a}{y} + \dfrac{b}{1-y}$

$1 = (1-y)a + yb$

$\Leftrightarrow 0y + 1 = (-a+b)y + a$

$\therefore -a + b = 0$

$a = 1$ より $b = 1$ $\quad \therefore a = b = 1$.

(2) $\dfrac{dy}{dx} = y(1-y)$ より

$\displaystyle\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx$

これを (1) のように変形すると,

$\displaystyle\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = \int dx$

$\log\left|\dfrac{y}{1-y}\right| = x + C$ （C は積分定数）

これより, $\dfrac{y}{1-y} = C'e^x$ （C' は任意定数） $C' = \pm e^C$

分母を払って $y = C'e^x(1-y)$

y について解くと, $y = \dfrac{C'e^x}{1+C'e^x}$ OK!

$x = 0$ とすると, $y = \dfrac{2}{3}$ より

$\dfrac{C'}{1+C'} = \dfrac{2}{3}$ よって, $C' = 2$

したがって $y = \dfrac{2e^x}{1+2e^x}$ OK!

$\left|\dfrac{y}{1-y}\right| = e^{x+C}$

$\dfrac{y}{1-y} = \pm e^{x+C}$

$\dfrac{y}{1-y} = \pm e^C \cdot e^x$

$\dfrac{y}{1-y} = C'e^x$

Step 1 ①による一般解の導出

Step 2 初期条件②による任意定数 C の決定

講評および注意. (1) y についての恒等式 $1 = (b-a)y + a$ $(\Longleftrightarrow 0y + 1 = (b-a)y + a)$ の係数比較を行えば良い. 多くの学生が適切に正答を得ていた.

(2) 変数分離形の方法による, $(*)$ 式の一般解:

$$y = \frac{Ce^x}{1+Ce^x},\ y = \frac{1}{1+Ce^{-x}},\ \text{あるいは}\ y = \frac{e^{x+C}}{1+e^{x+C}}$$

の導出は大変良く出来ていた. 上の一般解に初期条件 $y(0) = \frac{2}{3}$, すなわち, $x = 0$, $y = \frac{2}{3}$ を代入することで, 任意定数 C が決定され, 初期値問題が解かれる. 一方で, 一般解 $y = \frac{e^{x+C}}{1+e^{x+C}}$ に $x = 0$, $y = \frac{2}{3}$ を代入し, $C = \log 2$ と任意定数を決定した後, 次の等式:

$$\frac{e^{x+\log 2}}{1+e^{x+\log 2}} = \frac{e^x e^{\log 2}}{1+e^x e^{\log 2}} = \frac{e^x \cdot 2}{1+e^x \cdot 2} = \frac{2e^x}{1+2e^x}$$

に着目せず, $y = \frac{2e^x}{1+2e^x}$ でなく, $e^{x+\log 2}$ を $2e^x$ に簡略化しないまま $y = \frac{e^{x+\log 2}}{1+e^{x+\log 2}}$ が解である, と完結する答案も見られた.