# 微分方程式 第 3 回レポート課題と解答

出題日: 2015/10/12 (月)

担当教員: 江夏 洋一 (A205 教室, 16:20-17:50)

**1.** 次の問いに答えよ.

(1) 非同次微分方程式 $y' - 2xy = e^{x^2}$ を解け. ただし, $' = \dfrac{d}{dx}$ である.

(2) 次の初期値問題:

$$\begin{cases} y' - 2xy = e^{x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad (**)$$

を解け. ただし, $' = \dfrac{d}{dx}$ である.

**解答 (概要).** (1) 次の 3 つのステップに分けて, 微分方程式 $y' - 2xy = e^{x^2}$ の一般解を求める.

Step 0. $y' - 2xy = e^{x^2}$ が（線形）**非同次**微分方程式であることの確認

$a(x) = 2x$, $b(x) = e^{x^2}$ とおくと, $a(x)y + b(x) = 2xy + e^{x^2}$

$b(x) \not\equiv 0$ より, $(**)$ 式は線形非同次方程式である。 ← 注 $b(x) \not\equiv 0 \cdots$ ○ $b(x) \neq 0 \cdots$ ×

Step 1. **変数分離法**を用いた**同次**方程式 $y' - 2xy = 0$ の一般解の導出

Step1

同次方程式 $y' = 2xy$ $(y' - 2xy = 0)$ の一般解 ※ → 般

始めに, $2xy = 2x \cdot y$ より, 微分方程式 $y' = 2x \cdot y$ は変数分離形である。

次に, $y \neq 0$ をみたす解を探す

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow dy = 2xy\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2x\,dx$$

絶対値: good!

$$\begin{aligned} \log|y| &= 2\int x\,dx \\ &= 2\left(\tfrac{1}{2}x^2 + C\right) \quad (C\text{は任意定数}) \\ &= x^2 + 2C \\ &= x^2 + C \quad (2C\text{を}C\text{で置き換えた}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \pm e^{x^2+C} \\ &= Ce^{x^2} \quad (\pm e^C\text{を}C\text{と置き換えた}) \end{aligned}$$

実数全体の集合: $\mathbb{R}$ （Rに縦線）

ここで, $\forall C \in \mathbb{R}$ に対して $\pm e^C \neq 0$ より, $y = Ce^{x^2}$ $(C \neq 0)$

一方, $y = 0$ も $y' = 2xy$ を満たす $y = Ce^{x^2}$ に $C = 0$ を代入した解によって, $y = Ce^{x^2}$ ($C$は任意定数) great!

**裏面 (Step 2) へ進みましょう.**

Step 2. **定数変化法**を用いた元の**非同次**方程式 $y' - 2xy = e^{x^2}$ の一般解の導出

$y = C(x)e^{x^2}$ を $(*)$ に代入し, $C(x)$ を求める.

$y' - 2xy = e^{x^2} \Rightarrow (C(x)e^{x^2})' - 2x(C(x)e^{x^2}) = e^{x^2}$

$\Rightarrow C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = e^{x^2}$

$\Rightarrow C'(x)e^{x^2} - e^{x^2} = 0$

$\Rightarrow C'(x)e^{x^2} = e^{x^2}$

$\Rightarrow C'(x) = 1$

$C(x) = \int 1\,dx = x + C$ ($C$は任意定数)

以上より, $(*)$式の一般解は

$y = (x+C)e^{x^2}$,

すなわち $y = xe^{x^2} + Ce^{x^2}$ ($C$は任意定数) OK!

↳ $(x+C)e^{x^2}$ のままでも良いです.

(2). $\begin{cases} y' - 2xy = e^{x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $(**)$

(1)より $y' - 2xy = e^{x^2}$ の一般解は $y = (x+C)e^{x^2}$ ($C$は任意定数)

よって $(**)$ は $(0+C)e^{0} = 2$ ← $y = (x+C)e^{x^2}$ に $x=0$, $y=2$ を代入

$C = 2$.

$y = (x+2)e^{x^2}$ //

**講評.** (1) 同次方程式 $y' - 2xy = 0$ の一般解 $y = Ce^{x^2}$ を求めた後, **定数変化法** ($y = Ce^{x^2} \longrightarrow y = C(x)e^{x^2}$) を用いて, 元の非同次方程式 $y' - 2xy = e^{x^2}$ の一般解 $y = (x+C)e^{x^2}$ を得ます. なお, Step 1 において, 変数分離形の微分方程式:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \longleftarrow \underline{(x\text{ だけの関数})} \times \underline{(y\text{ だけの関数})}$$

の一般解を求める際, 等式 $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x$ の両辺を積分した後の絶対値に関する次の式変形の正誤にも注意しよう.

**[正]**

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\log|y| = x^2 + C \quad (C\text{ は任意定数})$$

$$|y| = e^{x^2+C}$$

$$y = \pm e^{x^2+C}$$

$$y = \pm e^{C}e^{x^2}.$$

$\pm e^{C}$ を $C$ と置き換えると, $y' - 2xy = 0$ の一般解は

$$y = Ce^{x^2} \quad (C\text{ は任意定数}).$$

**[誤]**

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\log y = x^2 + C \quad (C\text{ は任意定数})$$

$$y = e^{x^2+C}$$

$$y = e^{C}e^{x^2}.$$

$e^{C}$ を $C$ と置き換えると, $y' - 2xy = 0$ の一般解は

$$y = Ce^{x^2} \quad (C\text{ は任意定数}).$$

(2) 初期条件 $y(0) = 2$, すなわち, $x = 0$, $y = 2$ を (1) で得られた一般解 $y = (x+C)e^{x^2}$ に代入し, 任意定数 $C$ を決定すれば良い. 大変良く出来ていました.