§5.5. 定数係数 n 階線形（同次）微分方程式（テキスト p.142-154）

$n=2$ の場合

次の定数係数 2 階線形同次微分方程式を考える．

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{$*$}$$

ただし，$p, q \in \mathbb{R}$ である．このとき，微分方程式 $(*)$ の特性方程式は

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{$**$}$$

命題． 微分方程式 $(*)$ の一般解は次の 3 通りに分類される．

(i)	2 次方程式 $(**)$ が **2 つの実根** $\alpha,\ \beta\ (\alpha \neq \beta)$ をもつ場合	$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$,
(ii)	2 次方程式 $(**)$ が **1 つの重根** α をもつ場合	$y = (A + Bx)e^{\alpha x}$,
(iii)	2 次方程式 $(**)$ が **2 つの虚根** $\mu \pm \omega i\ (\omega \neq 0)$ をもつ場合	$y = Ae^{\mu x}\cos\omega x + Be^{\mu x}\sin\omega x$.

ただし，A, B は任意定数である．

例． 微分方程式 $y'' - 4y' - 12y = 0$ を解け（一般解を求めよ）．

解答 (概要)． 微分方程式 $y'' - 4y' - 12y = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0,\quad \text{すなわち，}(\lambda - 6)(\lambda + 2) = 0. \tag{$***$}$$

2 次方程式 $(***)$ は **2 つの実根** $\lambda = 6, -2$ をもつ．したがって，一般解は $y = Ae^{6x} + Be^{-2x}$（A, B は任意定数）． $\cdots$ (答)

問． 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ).

(i) $y'' - 4y = 0$ (ii) $y'' - 8y' + 16y = 0$ (iii) $y'' + 4y' + 5y = 0$

$n=3$ の場合

次の定数係数 3 階線形同次微分方程式を考える．

$$y''' + py'' + qy' + ry = 0. \tag{$\dagger$}$$

ただし，$p, q, r \in \mathbb{R}$ である．このとき，微分方程式 $(\dagger)$ の特性方程式は

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0. \tag{$\dagger\dagger$}$$

命題． 微分方程式 $(\dagger)$ の一般解は次の 4 通りに分類される．

(i)	3 次方程式 $(\dagger\dagger)$ が **3 つの実根** $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha, \beta, \gamma$ は相異なる$)$ をもつ場合	$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x}$,
(ii)	3 次方程式 $(\dagger\dagger)$ が **1 つの実根** α と **1 つの重根** $\beta\ (\alpha \neq \beta)$ をもつ場合	$y = Ae^{\alpha x} + (B + Cx)e^{\beta x}$,
(iii)	3 次方程式 $(\dagger\dagger)$ が **1 つの重根** α をもつ場合	$y = (A + Bx + Cx^2)e^{\alpha x}$.

さらに，3 次方程式 $(\dagger\dagger)$ が **1 つの実根** α と **2 つの虚根** $\mu \pm \omega i\ (\omega \neq 0)$ をもつ場合，微分方程式 $(\dagger)$ の一般解は $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\mu x}\cos\omega x + Ce^{\mu x}\sin\omega x$．ただし，$A, B, C$ は任意定数である．

例． 微分方程式 $y''' + y = 0$ を解け（一般解を求めよ）．

解答 (概要)． 微分方程式 $y''' + y = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^3 + 1 = 0,\quad \text{すなわち，}(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0. \tag{$\dagger\dagger\dagger$}$$

3 次方程式 $(\dagger\dagger\dagger)$ は **1 つの実根** $\lambda = -1$ と **2 つの虚根** $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ をもつ．したがって，一般解は $y = Ae^{-x} + Be^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + Ce^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}$（$A, B, C$ は任意定数）． $\cdots$ (答)

授業中に補えなかった項目は，復習を徹底しましょう．