# 微分方程式 第 5 回レポート課題と解答

出題日: 2015/10/26(月)

担当教員: 江夏 洋一 (A205 教室, 16:20-17:50)

**1．** 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，$' = \dfrac{d}{dx}$ である．

$$(1)\ y'' + 6y' + 8y = 0 \qquad (2)\ y'' - 2y' + y = 0 \qquad (3)\ y'' - 6y' + 10y = 0$$

**解答 (概要).**

(1) $y''+6y'+8y=0$ の特性方程式:

$\lambda^2+6\lambda+8=0$ OK!

の根は $\lambda=-2,\ -4$ OK! (相異なる2つの実根)

したがって, $y=Ae^{-2x}+Be^{-4x}$ (A,Bは任意定数)」 //

(2) $y''-2y'+y=0$ の特性方程式:

$\lambda^2-2\lambda+1=0$ OK!

の根は $\lambda=1$ OK! (重根)

したがって, $y=Ae^{x}+Bxe^{x}$ (A,Bは任意定数)」 //

注: $Bxe^x$ … ○, $Be^x$ … ×

(3) $y''-6y'+10y=0$ の特性方程式:

$\lambda^2-6\lambda+10=0$ OK!

の根は $\lambda=3\pm i$ OK! (相異なる2つの虚根)

したがって, $y=Ae^{3x}\cos x+Be^{3x}\sin x$ (A,Bは任意定数)」 //

**2．** 初期値問題 $\begin{cases} y'' - 9y = 0 & \cdots ① \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 6 & \cdots ② \end{cases}$ を解け．ただし，$' = \dfrac{d}{dx}$ である．

**解答 (概要).**

Step 1. $y''-9y=0$ の一般解

①の式の特性方程式は $\lambda^2-9=0$. $\lambda^2=9$. $\lambda=\pm 3$ } OK!

よって①は 2つの実根 $\lambda=\pm 3$ をもつ.

したがって ①の一般解は $y=Ae^{3x}+Be^{-3x}$ (A,Bは任意定数) …③ OK!

Step 2. 初期条件 $y(0)=0$, $y'(0)=6$ による任意定数A, Bの決定

③より, $y'=3Ae^{3x}-3Be^{-3x}$ …④

②, ③, ④より

$y=Ae^{3x}+Be^{-3x}$ に $y(0)=0$, すなわち, $x=0, y=0$ を代入

$y(0)=Ae^{0}+Be^{0}=0 \longrightarrow A+B=0$ …⑤

$y'(0)=3A-3B=6 \longrightarrow A-B=2$ …⑥ } OK!

$y'=3Ae^{3x}-3Be^{-3x}$ に $y'(0)=6$, すなわち, $x=0, y'=6$ を代入

⑤, ⑥より $A=1$, $B=-1$ 」OK!

以上より, ①の一般解は $y=e^{3x}-e^{-3x}$ 」 //

特殊解です.
(単に, 解としても良いです.)

**発展 1．**任意の実数 $a, b, c, d$ に対して，3 次方程式：

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0,\ a \neq 0$$

が少なくとも 1 つの実数解を (常に) もつことを示せ．

**解答 (概要)．** **中間値の定理**を用いることで，3 次方程式が少なくとも 1 つの実数解をもつことが示される．

発展 1.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ について

$a > 0$ のとき

「$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$　　$\lim_{x \to -\infty} = -\infty$」 good!

よって 十分に大きな $x_1$，十分に小さな $x_2$ をとると，$f(x_1) > 0$，$f(x_2) < 0$ となる。

($x_1$，$x_2$ ともに実数)

$f(x)$ は連続~~する~~な関数なので，

中間値の定理より，$x_1$ と $x_2$ の間に

good! $f(x_3) = 0$ となる $x_3$ (実数) が

存在する。($a < 0$ で同様)

よって $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$，$a \neq 0$ は

少なくとも 1 つ実数解をもつ。■

**発展 2．**次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，$' = \dfrac{d}{dx}$ である．

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$$

**解答 (概要)．** **多項式の除算**や**因数定理**などを用いた**高次方程式の因数分解**を行えば良い．

$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ の特性方程式：

$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$ OK!

$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 5\lambda + 6) = 0$

$(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$

の根は $\lambda = -1, -2, -3$ OK!

したがって，一般解は

$y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + Ce^{-3x}$

($A, B, C$ は任意定数)」