目標

微分演算子 D の逆演算子 $\frac{1}{D}(=D^{-1})$ を用いた定数係数線形非同次微分方程式の特殊解

1. 微分演算子 D

任意の関数 $y(=y(x))$ に対して, 関数 Ty を対応させる規則 T が与えられているとする. このとき, T を**演算子**という.

定義 (演算子の和, 差および積). $y(=y(x))$ を任意の関数とする. このとき, 演算子 T, U に対して, その**和** $T+U$ および **差** $T-U$ を

$$(T+U)y = Ty + Uy,\ (T-U)y = Ty - Uy$$

とそれぞれ定義する. また, 演算子 T, U の**積** TU を

$$(TU)y = T(Uy)$$

と定義する.

特に, 関数 y に対して, その導関数 $Dy(=\frac{dy}{dx})$ を対応させる演算子 $D(=\frac{d}{dx})$ を**微分演算子**という.

命題 (微分演算子 D の線形性). $y_1(=y_1(x)), y_2(=y_2(x))$ を任意の関数とする. このとき, 次の等式:

$$D(ay_1 \pm by_2) = aDy_1 \pm bDy_2$$

が任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ.

注意. $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$ は自然数) とする. t の多項式 $f(t)$ を

$$f(t) := a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \tag{$*$}$$

と定義する. このとき, t の代わりに微分演算子 $D(=\frac{d}{dx})$ を $(*)$ 式に (形式的に) 代入して得られる演算子:

$$f(D) := a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$$

も微分演算子である.

例. $a, b \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 微分演算子 $D-a$, $D-b$ の**積** $(D-a)(D-b)$ について次の等式:

$$(D-a)(D-b) = D^2 - (a+b)D + ab$$

が成り立つ. 例えば

$$\begin{aligned}(D-1)(D+3)(x^3+2x^2) =& (D^2+2D-3)(x^3+2x^2)\\ =& D^2(x^3+2x^2) + 2D(x^3+2x^2) - 3(x^3+2x^2)\\ =& \frac{d^2}{dx^2}(x^3+2x^2) + 2\frac{d}{dx}(x^3+2x^2) - 3(x^3+2x^2)\\ =& 6x+4+2(3x^2+4x) - 3(x^3+2x^2)\\ =& -3x^3+14x+4.\end{aligned} \tag{$**$}$$

さらに, $(D-b)(D-a) = (D-a)(D-b)$ も成り立つ. すなわち, 微分演算子 $D-a$, $D-b$ は演算子の積について**交換可能**である. 例えば, $(**)$ の式変形と同様の方法により, 次の等式:

$$(D-1)(D+3)(x^3+2x^2) = (D+3)(D-1)(x^3+2x^2)$$

も成り立つ.

2. 逆演算子 $\frac{1}{D}(=D^{-1})$

関数 y が与えられたとき, ある演算子 T が y に作用して, 関数 z を用いて

$$z = Ty \tag{$\dagger$}$$

と書けるとする. 逆に関数 z が与えられたとき, ($\dagger$) 式をみたすように y を対応させる演算子を, T の**逆演算子**とよび, $\frac{1}{T}$ あるいは T と書く. このとき,

$$y = \frac{1}{T}z,\quad あるいは\quad y = T^{-1}z$$

と書く. 特に, 関数 y に対して, その導関数 $Dy(=\frac{dy}{dx})$ を対応させる微分演算子 $D(=\frac{d}{dx})$ の **逆演算子** $\boldsymbol{\frac{1}{D}(=D^{-1})}$ について, 以下の式が成立する.

$$\frac{1}{D}F(x) = \int F(x)dx. \tag{$\dagger\dagger$}$$

つまり, $\frac{1}{D}F(x)(=D^{-1}F(x))$ は関数 $F(x)$ を x で**積分**して得られる関数である.

命題. $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 微分演算子 $f(D)$ の逆演算子 $\frac{1}{f(D)}(=f(D)^{-1})$ に対して, 以下の式が成立する.

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{f(D)}e^{\alpha x} = \frac{1}{f(\alpha)}e^{\alpha x}\quad (f(\alpha)\neq 0)\qquad \text{(ii)}\quad \frac{1}{f(D)}F(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{f(D+\alpha)}[e^{-\alpha x}F(x)] \tag{$\dagger\dagger\dagger$}$$

注意. 公式 ($\dagger\dagger\dagger$) は, **非同次**微分方程式の特殊解を得る際に有用である. しかし, 微分方程式 $y'' - 2y' + y = e^x$ の特殊解を求める場合など, ($\dagger\dagger\dagger$) の (i) 式が**適用できない**場合もある [**各自で具体的な理由を考えよう**].

注意. ($\dagger\dagger\dagger$) の (ii) 式に $f(D) = (D-\alpha)^n$ を代入すると, $\frac{1}{f(D+\alpha)} = \frac{1}{\{(D+\alpha)-\alpha\}^n} = \frac{1}{D^n}$ および ($\dagger\dagger$) 式より

$$\frac{1}{(D-\alpha)^n}F(x) = e^{\alpha x}\underbrace{\int\!\!\int\cdots\int}_{n\text{ 個}} e^{-\alpha x}F(x)dx\cdots dxdx. \tag{$\dagger\dagger\dagger\dagger$}$$

ただし, ($\dagger\dagger\dagger\dagger$) 式右辺の積分記号は $\boldsymbol{n}$ **回積分**を重ねることを表す.

命題 (演算子法による微分方程式の特殊解). 次の定数係数線形非同次微分方程式を考える.

$$f(D)y = F(x). \tag{$\ddagger$}$$

このとき, ($\ddagger$) 式の**特殊解**を $y_1(=y_1(x))$ とおくと, 以下の式が成立する.

$$y_1 = \frac{1}{f(D)}F(x). \tag{$\ddagger\ddagger$}$$

例. 微分方程式 $y'' - 2y' + y = x + 1$ ($\Longleftrightarrow$ $(D^2 - 2D + 1)y = x + 1$) の特殊解を求めよ.

解答 (概要). ($\ddagger\ddagger$) 式より, 微分方程式 $y'' - 2y' + y = x + 1$ の特殊解は逆演算子を用いて次のように与えられる.

$$y = \frac{1}{D^2 - 2D + 1}(x+1) = \frac{1}{(D-1)^2}(x+1).$$

はじめに, ($\dagger\dagger\dagger\dagger$) 式に $\alpha = 1$ および $F(x) = x + 1$ を代入すると

$$\frac{1}{(D-1)^2}(x+1) = e^x\int\!\!\int e^{-x}(x+1)dxdx\left(= e^x\int\left(\int e^{-x}(x+1)dx\right)dx\right).$$

次に, 部分積分法 ($\int F_1'(x)F_2(x)dx = F_1(x)F_2(x) - \int F_1(x)F_2'(x)dx$) を用いると

$$\begin{aligned}
e^x\int\!\!\int e^{-x}(x+1)dxdx &= e^x\int\left\{-e^{-x}(x+1) - \int(-e^{-x})(x+1)'dx\right\}dx &&\text{(部分積分 : 1 回目)}\\
&= -e^x\int e^{-x}(x+2)dx &&\left(e^x\int e^{-x}G(x)dx = \int G(x)dx\ \text{は誤り}\right)\\
&= -e^x\left\{(-e^{-x})(x+2) - \int(-e^{-x})(x+2)'dx\right\} &&\text{(部分積分 : 2 回目)}\\
&= -e^x(-e^{-x})(x+3) = x+3.
\end{aligned}$$

したがって, 微分方程式 $y'' - 2y' + y = x + 1$ の特殊解は $y = x + 3$. $\cdots$ (答)