目標: 行列やベクトルの基本計算による, 連立微分方程式 (微分方程式系) への応用

1. 行列の加法, 減法, スカラー倍および乗法

数 (実数あるいは複素数) を縦および横に並べて長方形に配列したものを**行列**という. また, m, n を自然数とすると, 数 a_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ を縦に m 個, 横に n 個並べて得られる行列:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を $\boldsymbol{m \times n}$ **行列**という. このとき, $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ **は** $\boldsymbol{(m, n)}$ **型行列**と呼ばれる. 特に, 行列 A のすべての成分が 0 のとき, A は**零行列**と呼ばれる. なお, $m = n$ のとき, 行列 A を**正方行列**という.

定義 1.1 (行列の和, 差およびスカラー倍). m, n を自然数とし, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を (m, n) 型行列とする. このとき, 2 つの行列 A, B に対して, その**和** $A + B$ および**差** $A - B$ を

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad \text{すなわち}, \quad A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij}), \quad \text{すなわち}, \quad A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

とそれぞれ定義する. さらに, スカラー k に対して, 行列 A の**スカラー倍** kA を

$$kA = (ka_{ij}), \quad \text{すなわち}, \quad kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

と定義する. なお, $A + B$, $A - B$, kA のいずれも (m, n) 型行列である.

例 1.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする. このとき, $A + B$, $-3A$, $A - 2B$ を求めよ.

解答. 定義 1.1 より, $A + B$, $-3A$, $A - 2B$ のいずれも $(2, 3)$ 型行列であり,

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 1 & 4 + (-2) & 1 + 2 \\ -1 + (-3) & -3 + 0 & 3 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$-3A = -3\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 & -3 \cdot 4 & -3 \cdot 1 \\ -3 \cdot (-1) & -3 \cdot (-3) & -3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 & -3 \\ 3 & 9 & -9 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A - 2B &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 2 & 4 - (-4) & 1 - 4 \\ -1 - (-6) & -3 - 0 & 3 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -3 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\cdots$ (答)

定義 1.2 (行列の積). l, m, n を自然数とし, $A=(a_{ij})$ を (l, m) 型行列, $B=(b_{ij})$ を (m, n) 型行列とする. このとき,

$$\text{行列 } A \text{ の}\textbf{列の数} = \text{行列 } B \text{ の}\textbf{行の数}$$

であり, 2 つの行列 A, B に対して, その積 AB を

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1n}+\cdots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1}b_{11}+\cdots+a_{ln}b_{n1} & a_{l1}b_{12}+\cdots+a_{ln}b_{n2} & \cdots & a_{l1}b_{1n}+\cdots+a_{ln}b_{nn} \end{pmatrix}$$

と定義する. $C=AB$ とおくと, 行列 C は (l, n) 型行列である. また, C の (i, j) 成分 c_{ij} $(1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n)$ は行列 A の i 行と行列 B の j 列との内積, すなわち

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

で書き表される. なお, 行列 A の**列の数**と行列 B の**行の数**が等しくないとき, 2 つの行列の積 AB は定義されない.

注意. 一般に, 行列の積は**可換ではない**. すなわち, 2 つの行列 A, B に対して $AB=BA$ が常に成り立つとは限らない. なお, 可換となりうる行列は正方行列のみである. **[各自で理由を考えよう]**

例 1.2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 行列 AB および行列 BA を求めよ.

解答. 定義 1.2 より, 行列 AB, BA はいずれも $(3, 3)$ 型行列であり,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\cdot 1+(-2)\cdot 0+4\cdot(-1) & 0\cdot 3+(-2)\cdot(-1)+4\cdot(-2) & 0\cdot(-4)+(-2)\cdot 1+4\cdot 3 \\ 1\cdot 1+3\cdot 0+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot 3+3\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) & 1\cdot(-4)+3\cdot 1+(-1)\cdot 3 \\ -1\cdot 1+(-3)\cdot 0+2\cdot(-1) & -1\cdot 3+(-3)\cdot(-1)+2\cdot(-2) & -1\cdot(-4)+(-3)\cdot 1+2\cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -6 & 10 \\ 2 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 0+3\cdot 1+(-4)\cdot(-1) & 1\cdot(-2)+3\cdot 3+(-4)\cdot(-3) & 1\cdot 4+3\cdot(-1)+(-4)\cdot 2 \\ 0\cdot 0+(-1)\cdot 1+1\cdot(-1) & 0\cdot(-2)+(-1)\cdot 3+1\cdot(-3) & 0\cdot 4+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 2 \\ -1\cdot 0+(-2)\cdot 1+3\cdot(-1) & -1\cdot(-2)+(-2)\cdot 3+3\cdot(-3) & -1\cdot 4+(-2)\cdot(-1)+3\cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 19 & -7 \\ -2 & -6 & 3 \\ -5 & -13 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\cdots$(答)

問 1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 行列 AB および行列 AC を求めよ.

解答 (概要). 定義 1.2 より, 行列 AB は $(2, 1)$ 型行列, 行列 AC は $(2, 2)$ 型行列であり

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 6 \\ 3\cdot 5+4\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 1\cdot 7+2\cdot 9 & 1\cdot 8+2\cdot 10 \\ 3\cdot 7+4\cdot 9 & 3\cdot 8+4\cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \end{pmatrix}.$$

$\cdots$ (答)