目標: 行列やベクトルの基本計算による, 連立微分方程式 (微分方程式系) への応用

2. 行列の基本変形および階数

与えられた行列に対して, 次の 4 つの操作を行 (または列) の**基本変形**という.

(i) ある行 (または列) に 0 でない数を掛ける.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行目}\times(-2)]{} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 10 \\ -4 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 列目}\times\frac{1}{5}]{} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) ある行 (または列) を他の行 (または列) に加える, あるいは引く.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行目}+2\text{ 行目}]{} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 列目}-2\text{ 列目}]{} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(iii) ある行 (または列) の定数倍を他の行 (または列) に加える, あるいは引く.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行目}\times 2-3\text{ 行目}]{} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 列目}\times 3-3\text{ 列目}]{} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(iv) 2 つの行 (または列) を交換する.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行目}\leftrightarrow 2\text{ 行目}]{} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 列目}\leftrightarrow 2\text{ 列目}]{} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

要注意. 基本変形 (i)-(iv) の過程で "$\longrightarrow$" を用いている. テキストによってその記法は様々であるが, 基本変形の前後で行列同士を**等号 "=" で結んではならない**.

定義 2.1 (階数). A を零行列でない (m,n) 型行列とする. このとき, 有限回の基本変形によって行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} E_r & * \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}, \quad 1 \le r \le \min\{m,n\}$$

の形に変形できるとき, r を行列 A の**階数 (ランク)** といい,

$$\operatorname{rank} A = r$$

と表す. ただし, $O_{\alpha,\beta}$ は (α,β) 型の零行列, $*$ は任意の $(r,n-r)$ 型行列で, E_r は次の (r,r) 型の正方行列:

$$E_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

すなわち, r 次の単位行列である (r は基本変形の仕方に依存しない). A が零行列 O のときは $\operatorname{rank} A = 0$ とする.

注意. 行列の階数を求めるには, 基本変形 (i)-(iv) を用いて 0 でない成分が右上に階段状に残るように変形すればよい. このとき, その**階段の段数と行列の階数 (rank) は等しい**. 例えば, 基本変形 (i)-(iv) の具体例として上で用いた 2 つの行列について, 次の等式が成り立つ.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 10 \\ -4 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 15 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3.$$

定義 3.1 (置換の符号). σ を有限集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ で定義された置換とする．はじめに，T_n および $\sigma_{\{i,j\}}$ を

$$T_n := \{\{i,j\} | 1 \leq i \leq j \leq n\}, \quad \sigma_{\{i,j\}} := \begin{cases} 1 & \sigma(i) < \sigma(j) \\ -1 & \sigma(i) > \sigma(j) \end{cases}$$

と定義する．このとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}(\sigma) &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \\ &= \prod_{\{i,j\} \in T_n} \sigma_{\{i,j\}} = (\sigma_{\{1,2\}} \cdots \sigma_{\{1,n\}})(\sigma_{\{2,3\}} \cdots \sigma_{\{2,n\}}) \cdots \sigma_{\{n-1,n\}} \end{aligned}$$

を**置換 σ の符号**という．また，$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ のとき σ は偶置換，$\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ のとき σ は奇置換であるという．

例 3.1. σ を 3 つの元を含む有限集合 $\{1,2,3\}$ 上定義された置換とし，$\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=3$, $\sigma(3)=1$ とする．次の等式:

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \prod_{\{i,j\} \in T_3} \sigma_{\{i,j\}} = \sigma_{\{1,2\}}\sigma_{\{1,3\}}\sigma_{\{2,3\}} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1, \quad \text{すなわち，} \ \sigma \ \text{は偶置換.}$$

定義 3.2 (行列式). $A = (a_{ij})$ を n 次の正方行列とする．このとき，行列 A の各列から 1 つずつ，同じ行から重複なく得られる計 n 個の成分からなる積 $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$ に置換の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を掛けて得られる総和:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

を行列 A の**行列式**といい，$\det A$, $|A|$, あるいは $D(A)$ などと表す．ただし，S_n は有限集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上で定義される置換の全体である．**特に，A が 2 次の正方行列，すなわち $n=2$ の場合，$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ である．**

例 3.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，行列式 $\det A$ および $\det B$ を求めよ．

解答 (概要). 定義 3.2 より，S_2 は 2 $(=2!)$ 通りの置換全体，S_3 は 6 $(=3!)$ 通りの置換全体であることに注意すると

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_2} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2} = 1 \cdot a_{11}a_{22} + (-1) \cdot a_{21}a_{12} = 1 \cdot 6 + (-1) \cdot 1 = 5, \\ \det B &= \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3} \\ &= 1 \cdot a_{11}a_{22}a_{33} + 1 \cdot a_{21}a_{32}a_{13} + 1 \cdot a_{31}a_{12}a_{23} + (-1) \cdot a_{11}a_{32}a_{23} + (-1) \cdot a_{21}a_{12}a_{33} + (-1) \cdot a_{31}a_{22}a_{13} \\ &= 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 6 + (-1) \cdot 0 = -3. \end{aligned}$$

したがって，$\det A = 5$ (あるいは $|A| = 5$), $\det B = -3$ (あるいは $|B| = -3$). $\cdots$ (答)

注意 3.1. 2 次および 3 次の正方行列の行列式は**サラスの方法**を用いることで，計算が容易になる．

定義 3.3 (余因子). $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする．A の行列式 $\det A$ から i 行と j 列を取り除いて得られる $(n-1)$ 次の行列式 D_{ij} を行列式 $\det A$ の (i,j) 成分の**小行列式**といい，

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

を行列式 $\det A$ の (i,j) 成分の**余因子**という．さらに，余因子 A_{ij} を用いて，次の式が成り立つ．

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} \ (i \text{ 行による展開}), \quad \det A = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \ (j \text{ 列による展開})$$

例 3.3. **第 3 行**による展開 $(|B| = b_{31}A_{31} + b_{32}A_{32} + b_{33}A_{33})$:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-9) = -3.$$