微分方程式 第 8 回レポート課題と解答

出題日: 2015/11/16(月)

担当教員: 江夏 洋一 (A205 教室, 16:20-17:50)

1. 次の行列の積を計算せよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解答 (概要).

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times(-3)+2\times2 & 1\times1+2\times(-1) \\ 3\times(-3)+4\times2 & 3\times1+4\times(-1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3\times1+2\times4 = 11$

(3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times1 & 3\times2 \\ 4\times1 & 4\times2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

2. 次の等式をみたすベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ をすべて求めよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解答 (概要).

(1) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4x-3y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 4x-3y=-2 \\ x+y=3 \end{cases}$

$x=1$

$y=2$

$\therefore\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 4x-3\cancel{x}^{y}=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

$x=0$

$y=0$

$\therefore\ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 4x-3y=0 \\ -4x+3y=0 \end{cases}$

$x=a$ とおくと.

$y=\frac{4}{3}a$

$\therefore\ u = \begin{pmatrix} a \\ \frac{4}{3}a \end{pmatrix}\ (a\in\mathbb{R})$

$u = \begin{pmatrix} 3a \\ 4a \end{pmatrix}\ (a\in\mathbb{R})$,

$u = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a \\ a \end{pmatrix}\ (a\in\mathbb{R})$

などでも良い.

3. 次の行列の固有値および各固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

解答 (概要). (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと, 行列 A の固有値 λ は固有方程式:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \ \ (\text{あるいは } \det(\lambda I - A) = 0)$$

をみたす.

まず固有方程式 $\underset{\det}{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}} = 0$ を解く

$(1-\lambda)(2-\lambda) - 12 = 0$

$\Leftrightarrow -10 - 3\lambda + \lambda^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0$

$\therefore \underline{\lambda = 5, -2}$ OK!

(i) $\lambda = 5$ のとき

$\begin{pmatrix} 1-5 & 4 \\ 3 & 2-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow -x_1 + x_2 = 0$

$\therefore x_1 = t,\ x_2 = t$

(t は任意定数)

$\therefore$ 固有ベクトルは $\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ OK!

(ii) $\lambda = -2$ のとき

$\begin{pmatrix} 1+2 & 4 \\ 3 & 2+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 6x_1 + 8x_2 = 0$

$x_1 = t$ とすると $x_2 = -\frac{3}{4}t$

(t は任意定数)

$\therefore$ 固有ベクトルは $\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}}$ OK!

$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ などでも良い.

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A$ とおく

$\lambda I - A = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda I - A) = (\lambda-3)(\lambda-3) - (-1)(-1) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$

$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Longrightarrow \underline{\lambda = 2, 4}$ OK!

$\lambda = 2$ のとき $\begin{cases} 3x + y = 2x \\ x + 3y = 2y \end{cases} \Longrightarrow x + y = 0 \quad \therefore \underline{u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ OK!

$\lambda = 4$ のとき $\begin{cases} 3x + y = 4x \\ x + 3y = 4y \end{cases} \Longrightarrow x - y = 0 \quad \therefore \underline{u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ OK!

発展 1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値および各固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

解答 (概要). 行列 A の固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ (I: n 次単位行列) の根 λ が求める固有値である.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 4 & \lambda-4 & -2 \\ -4 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 4+(-4) & \lambda-4+3 & -2+(\lambda+1) \\ -4 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ -4 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$\text{余因子展開} \longrightarrow \ =(\lambda-1)\left\{\lambda\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right\} = \cdots = (\lambda-1)\lambda(\lambda-2).$$

よって, $\det(\lambda I - A) = 0 \Longleftrightarrow (\lambda-1)\lambda(\lambda-2) = 0$, すなわち, $\lambda = 1, 0, 2$. 次に, $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ および $\lambda = 2$ に属する A の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ および $\boldsymbol{u}_3$ をそれぞれ求める.

(i) $\lambda = 0$ のとき, 行列 $\lambda I - A$ の「行の」基本変形を次のとおり行う.

Step 1 行列 $\lambda I - A$ の **0 でない成分が右上に階段状に残る**ように変形する.

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行目}\leftrightarrow 3\text{ 行目}]{} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行目}+1\text{ 行目}]{} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行目}-2\text{ 行目}]{} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Step 2 階段状に基本変形された行列において, **段数が 1 段増える成分**より**上側の値をすべて 0 にする**ように変形する.

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\times 3]{} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行目}+2\text{ 行目}]{} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって, 連立方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{u}_1 = O$ (O は零行列) を解くと, $\boldsymbol{u}_1 = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. ただし, C_1 は 0 を除く定数である.

(ii) $\lambda = 1$ のとき, (i) と同様に行列 $\lambda I - A$ の「行の」基本変形を行うと

$$\lambda E_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行目}+2\text{ 行目}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって, 連立方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{u}_2 = O$ を解くと, $\boldsymbol{u}_2 = C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. ただし, C_2 は 0 を除く定数である.

(iii) $\lambda = 2$ のとき, (i) と同様に行列 $\lambda I - A$ の「行の」基本変形を行うと

$$\lambda E_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行目}\leftrightarrow 3\text{ 行目}]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ **[各自で基本変形を行おう]**

したがって, 連立方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{u}_3 = O$ を解くと, $\boldsymbol{u}_3 = C_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. ただし, C_3 は 0 を除く定数である. $\cdots$ (答)

行列の固有値・固有ベクトルの幾何学的な意味・応用

定義 (固有値, 固有ベクトル). n 次の正方行列 A に対して

$$A\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u} \tag{$*$}$$

をみたす $\lambda \in \mathbf{C}$ とベクトル $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ が存在するとき, λ を A の**固有値**といい, $\boldsymbol{u}$ を**固有値** λ に属する**固有ベクトル**という.

注意 1. $(*)$ 式は $(A - \lambda I)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ (I: n 次単位行列) と書き表せる. したがって, 方程式 $(A - \lambda I)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ が $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ なる解をもつための必要十分条件は $\det(A - \lambda I) = 0$ が成立することである. なお, 固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ の成分に複素数を含む場合がある.

問 1. 行列 $A = \begin{pmatrix} -999 & 1001 \\ -998 & 1000 \end{pmatrix}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

解答 (空欄を埋めよう). はじめに, 行列 A の固有値 λ は $\det(A - \lambda I) = 0$ をみたすので

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) = 0 &\iff \det \begin{pmatrix} -999 - \lambda & 1001 \\ -998 & 1000 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff (-999 - \lambda)(1000 - \lambda) - 1001(-998) = 0 \\
&\iff \lambda^2 - \lambda - (999 \cdot 1000 - 1001 \cdot 998) = 0 \\
&\iff \lambda^2 - \lambda - \boxed{(a)\quad} = 0,
\end{aligned}$$

すなわち $\lambda^2 - \lambda - \boxed{(a)\quad} = (\lambda + 1)(\lambda - \boxed{(b)\quad})$ より, $\lambda = -1,\ \boxed{(c)\quad}$. $\cdots$ (答)

(i) $\lambda = -1$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$

$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ とおく. このとき, 固有ベクトル $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は $(A - (-1)I)\boldsymbol{u} = 0$, すなわち

$$(A - (-1)I)\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -999 - (-1) & 1001 \\ -998 & 1000 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -998 & 1001 \\ -998 & 1001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

をみたす. 上式を解くと, $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{998}{1001}$. したがって, $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{998}{1001} \end{pmatrix}$ (あるいは $\begin{pmatrix} 1001 \\ 998 \end{pmatrix}$ など定数 ($\neq 0$) 倍も可).

(ii) $\lambda = \boxed{(c)\quad}$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ (i) と同様の計算により, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{(d)\quad} \\ \boxed{(e)\quad} \end{pmatrix}$. $\cdots$ (答)

注意 2. 固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ に行列 (線形変換) A を作用して得られるベクトル $A\boldsymbol{u}$ の方向は**不変, あるいは 180° 逆**である. 固有値 λ は, ベクトル $\boldsymbol{u}$ をベクトル $A\boldsymbol{u}$ に拡大・縮小する長さの**比率**を表す.

問 2. 問 1 を用いて, ベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{4001}{1001} \end{pmatrix}$ に行列 $A = \begin{pmatrix} -999 & 1001 \\ -998 & 1000 \end{pmatrix}$ を作用して得られるベクトル $A\boldsymbol{y}$ を求めよ.

解答 (概要). はじめに, ベクトル $\boldsymbol{y}$ は固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を用いて $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2$ と書き表されるので

$$A\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2) = A\boldsymbol{u}_1 + 3A\boldsymbol{u}_2.$$

さらに, 問 1 より $A\boldsymbol{u}_1 = -\boldsymbol{u}_1$, $A\boldsymbol{u}_2 = \boxed{(c)\quad}\boldsymbol{u}_2$ であるので

$$A\boldsymbol{y} = (-1)\boldsymbol{u}_1 + 3 \cdot \boxed{(c)\quad}\boldsymbol{u}_2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{998}{1001} \end{pmatrix} + \boxed{(f)\quad} \begin{pmatrix} \boxed{(d)\quad} \\ \boxed{(e)\quad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{(g)\quad} \\ \boxed{(h)\quad} \end{pmatrix}. \qquad \cdots \text{(答)}$$