# 微分方程式　レポート課題　2016/10/03(月)　問 1～4 解答 (概要)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 16:20-17:50)

**1．** 次の関数 $f(t)$ の導関数 $f'(t)\left(=\dfrac{df(t)}{dt}\right)$ を求めよ．

(1) $f(t)=\cos t+t\sin 3t$　(2) $f(t)=e^{-3t}+te^{-3t}$　(3) $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

(4) $f(t)=\cos^{-1}t$　(5) $f(t)=\dfrac{1}{t^2+3t+2}$

**2．** 次の関数 $f(t)$ の原始関数 $\displaystyle\int f(t)\,dt$ を求めよ．

(1) $f(t)=\cos t+t\sin 3t$　(2) $f(t)=e^{-3t}+te^{-3t}$　(3) $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

(4) $f(t)=\cos^{-1}t$　(5) $f(t)=\dfrac{1}{t^2+3t+2}$

**3．** 任意の定数 $C_1,C_2$ に対して，関数 $x:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R};\ x(t)=C_1\cos 4t+C_2\sin 4t$ が次の式：

$$x''(t)+kx(t)=0 \tag{$*$}$$

を満たすような実数 $k$ の値を求めよ．

**4．** 任意の定数 $C_1,\,C_2$ に対して，関数 $x:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R};\ x(t)=C_1e^{4t}+C_2e^{-4t}$ が次の式：

$$x''(t)+kx(t)=0 \tag{$**$}$$

を満たすような実数 $k$ の値を求めよ．

---

**1.**

(1) $f'(t)=-\sin t+\sin 3t+3t\cos 3t$.　(2) $f'(t)=-3e^{-3t}+(e^{-3t}-3te^{-3t})=-(3t+2)e^{-3t}$.

(3) $f'(t)=t'(1-t^2)^{-\frac12}+t((1-t^2)^{-\frac12})'=(1-t^2)^{-\frac12}+t(-\frac12(1-t^2)^{-\frac32}\cdot(-2t))$

$=(1-t^2)^{-\frac12}+t(t(1-t^2)^{-\frac32})=(1-t^2)^{-\frac12}+t^2(1-t^2)^{-\frac32}=(1-t^2)^{-\frac32}\{(1-t^2)+t^2\}=(1-t^2)^{-\frac32}$.

(4) $f'(t)=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.　(5) $f'(t)=(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2})'=-\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t+2)^2}$ (あるいは $-\frac{2t+3}{(t+1)^2(t+2)^2}$, $-\frac{2t+3}{(t^2+3t+2)^2}$).

**2.** $C$ を任意の定数とする．

(1) 部分積分を用いると, $\int f(t)\,dt=\sin t+\int t(-\frac13\cos 3t)'\,dt=\sin t+\{t(-\frac13\cos 3t)-\int(-\frac13\cos 3t)\,dt\}$.
　したがって, $\int f(t)\,dt=\sin t-\frac13 t\cos 3t+\frac19\sin 3t+C$.

(2) 部分積分を用いると, $\int f(t)\,dt=-\frac13e^{-3t}+\int t(-\frac13e^{-3t})'\,dt=-\frac13e^{-3t}+\{t(-\frac13e^{-3t})-\int(-\frac13e^{-3t})\,dt\}$.
　したがって, $\int f(t)\,dt=-\frac13e^{-3t}-\frac13te^{-3t}-\frac19e^{-3t}+C=-(\frac13t+\frac49)e^{-3t}+C$.

(3) $t=\cos s$ $(0<s<\pi)$ とおくと, $f(t(s))=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\cos s}{\sqrt{1-\cos^2 s}}=\frac{\cos s}{\sin s}$ かつ $\frac{dt}{ds}=-\sin s$.
　したがって, $\int f(t)\,dt=\int f(t(s))\frac{dt}{ds}\,ds=\int\frac{\cos s}{\sin s}(-\sin s)\,ds=-\int\cos s\,ds=-\sin s+C=-\sqrt{1-t^2}+C$.

(4) 部分積分を用いると, $\int f(t)\,dx=\int(t)'\cos^{-1}t\,dt=x\cos^{-1}t-\int t(\cos^{-1}t)'\,dt=t\cos^{-1}t-\int t(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}})\,dt$.
　したがって, $\int f(t)\,dt=t\cos^{-1}t+\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=t\cos^{-1}t-\sqrt{1-t^2}+C$.

(5) $\int f(t)\,dt=\int(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2})\,dt=\log|t+1|-\log|t+2|+C=\log|\frac{t+1}{t+2}|+C$.

**3.** $y=C_1\cos 4t+C_2\sin 4t$ を $(*)$ 式に代入すると, $C_1(k-16)\cos 4t+C_2(k-16)\sin 4t=0$. したがって, $k=16$.

**4.** $y=C_1e^{4t}+C_2e^{-4t}$ を $(**)$ 式に代入すると, $C_1(k+16)e^{4t}+C_2(k+16)e^{-4t}=0$. したがって, $k=-16$.