微分方程式　補助資料【配布日：2016/11/28(月)】

担当教員:　江夏 洋一 (A208 教室, 16:20-17:50)

1． 次の行列の積を計算せよ．　[(1)-(5) 各 5 点]

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

解答． (1) 2×2 型行列と 2×2 型行列の積は 2×2 型行列であり，

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+(-5)\cdot 1 & 2\cdot(-4)+(-5)\cdot(-3) \\ 3\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 & 3\cdot(-4)+(-1)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}. \quad \cdots (答)$$

(2) 2×2 型行列と 2×1 型行列の積は 2×1 型行列であり．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+(-2)\cdot(-1) \\ -4\cdot 2+5\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \end{pmatrix}. \quad \cdots (答)$$

(3) 3×1 型行列と 1×3 型行列の積は 3×3 型行列であり，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 & 1\cdot 2 & 1\cdot 1 \\ -2\cdot 0 & -2\cdot 2 & -2\cdot 1 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}. \quad \cdots (答)$$

(4) 2×2 型行列と 2×2 型行列の積は 2×2 型行列であり，

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot 1+1\cdot 3 & -3\cdot 2+1\cdot 4 \\ 2\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 2\cdot 2+(-1)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \cdots (答)$$

(5) 3×3 型行列と 3×1 型行列の積は 3×1 型行列であり，

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+(-2)\cdot 1+3\cdot(-1) \\ -4\cdot 3+5\cdot 1+(-6)\cdot(-1) \\ 7\cdot 3+(-8)\cdot 1+9\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad \cdots (答)$$

2． $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，AB および BA を求めよ．　[20 点]

解答． 3×3 型行列と 3×3 型行列の積は 3×3 型行列である（AB と BA が等しくないことにも注意しよう）．

$$AB = \cdots = \begin{pmatrix} -9 & 16 & 21 \\ -6 & 10 & 12 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad BA = \cdots = \begin{pmatrix} -9 & -8 & -7 \\ 12 & 10 & 8 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}. \quad \cdots (答)$$

3． 次の行列 A が正則であるかを述べよ．また，A が正則ならば A の逆行列 A^{-1} を求めよ．　[(1)-(3) 各 5 点]

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -124 & 165 \end{pmatrix} \quad (3)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

解答． (1) $|A| = 2\cdot(-1) - (-5)\cdot 3 = 13 \neq 0$ より，A は**正則である**．したがって，A の逆行列 A^{-1} が存在し，

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad あるいは，A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}. \quad \cdots (答)$$

(2) $|A| = 3\cdot 165 - (-124)\cdot(-4) = -1 \neq 0$ より，A は**正則である**．したがって，A の逆行列 A^{-1} が存在し，

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 165 & 4 \\ 124 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -165 & -4 \\ -124 & -3 \end{pmatrix}. \quad \cdots (答)$$

(3) $|A| = 3\cdot 8 - (-6)\cdot(-4) = 0$ より，A は**正則でない**．したがって，A の逆行列 A^{-1} は存在しない．　$\cdots$ (答)

4. 次の行列の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ および各固有値に属する固有ベクトル $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ を求めよ． [(1)-(2) 各 20 点]

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad (2)\ \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

解答． (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおき，A の固有値 λ および各固有値 λ に属する固有ベクトルを以下の手順により求めよう．

Step 1. 固有値 λ の導出：$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ より，

$$|A - \lambda I| = (1-\lambda)(2-\lambda) - 3 \cdot 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4).$$

したがって, 行列 A の固有値 λ は $\lambda = -1, 4$.

Step 2. 各固有値 λ に属する固有ベクトルの導出：

(i) $\lambda = -1$ の場合 $\cdots$ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned} (A-\lambda I)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2u_1 + 2u_2 = 0 \\ 3u_1 + 3u_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff 2u_1 + 2u_2 = 0. \end{aligned} \tag{$*$}$$

ここで，$u_1 = c$ (c は任意の定数) とおき，$u_1 = c$ を $(*)$ 式に代入すると $2c + 2u_2 = 0$，すなわち，$u_2 = -c$．したがって，

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} = c\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

(ii) $\lambda = 4$ の場合 $\cdots$ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned} (A-\lambda I)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} &\iff \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \\ &\iff \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -3u_1 + 2u_2 = 0 \\ 3u_1 - 2u_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff 3u_1 - 2u_2 = 0. \end{aligned} \tag{$**$}$$

ここで，$u_1 = c$ (c は任意の定数) とおき，$u_1 = c$ を $(**)$ 式に代入すると $3c - 2u_2 = 0$，すなわち，$u_2 = \frac{3}{2}c$．したがって，

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{3}{2}c \end{pmatrix} = c\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

(i), (ii) より, $\lambda = -1$ に属する固有ベクトルは $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$，$\lambda = 4$ に属する固有ベクトルは $\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$． $\cdots$ (答)

(2) $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ とおき，A の固有値 λ および各固有値 λ に属する固有ベクトルを以下の手順により求めよう．

Step 1. 固有値 λ の導出：$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 8-\lambda & -1 \\ -1 & 8-\lambda \end{pmatrix}$ より，$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 8)^2 - 1 = (\lambda - 7)(\lambda - 9)$ である．

したがって, 行列 A の固有値 λ は $\lambda = 7, 9$.

Step 2. 各固有値 λ に属する固有ベクトルの導出：(1) と同様の方法によって，$\lambda = 7$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\lambda = 9$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．[**(1) と同様に，各自で途中式過程を補おう**] $\cdots$ (答)