

微分方程式 第 10 回レポート課題と解答

出題日：2016/11/28(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 16:20-17:50)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ および固有ベクトル $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ を求めよ.

(2) 行列 A の指数関数 $e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots$ を求めよ.

(3) 2 次元ベクトル値関数 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ を未知関数とする連立微分方程式 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ の一般解を求めよ.

解答. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおき, A の固有値 λ および各固有値 λ に属する固有ベクトルを以下の手順により求めよう.

Step 1. 固有値 λ の導出: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ より,

$$|A - \lambda I| = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 \cdot 3 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda + 2)(\lambda - 5).$$

したがって, 行列 A の固有値 λ は $\lambda = -2, 5$ である.

... (答)

Step 2. 各固有値 λ に属する固有ベクトルの導出:

(i) $\lambda = -2$ の場合 ... $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ より,

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3u_1 + 4u_2 = 0 \\ 3u_1 + 4u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff 3u_1 + 4u_2 = 0.$$

(*)

ここで, $u_1 = c$ (c は任意の定数) とおき, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{c}$ を (*) 式に代入すると $3c + 4u_2 = 0$, すなわち, $u_2 = -\frac{3}{4}c$. したがって,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ -\frac{3}{4}\mathbf{c} \end{pmatrix} = \underline{\underline{c \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}}}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(ii) $\lambda = 5$ の場合 ... $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ より,

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -4u_1 + 4u_2 = 0 \\ 3u_1 - 3u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff 3u_1 - 3u_2 = 0.$$

(**)

ここで, $u_1 = c$ (c は任意の定数) とおき, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{c}$ を (**) 式に代入すると $3c - 3u_2 = 0$, すなわち, $u_2 = c$. したがって,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \underline{\underline{c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(i), (ii) より, $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルは $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}}}$, $\lambda = 5$ に対する固有ベクトルは $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$ である.

... (答)

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, $e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} P^{-1} = \cdots = \frac{4}{7} \begin{pmatrix} e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{5t} & -e^{-2t} + e^{5t} \\ -\frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{5t} & \frac{3}{4}e^{-2t} + e^{5t} \end{pmatrix}$ である. ... (答)

(3) $\mathbf{x} = e^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{5t} \\ -\frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{5t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -e^{-2t} + e^{5t} \\ \frac{3}{4}e^{-2t} + e^{5t} \end{pmatrix}$ (C_1, C_2 は任意の定数) である.

... (答)