§6.2. 一般の場合：定数係数 n 階線形（同次）微分方程式（テキスト p.178-186）

$n=2$ の場合

次の定数係数 2 階線形同次微分方程式を考える．

$$x'' + px' + qx = 0. \tag{$*$}$$

ただし，$p, q \in \mathbb{R}$ である．このとき，微分方程式 $(*)$ の特性方程式は

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{$**$}$$

命題． 微分方程式 $(*)$ の一般解は次の 3 通りに分類される．

$$\begin{cases} \text{(i)} & 2\text{ 次方程式 } (**) \text{ が } \textbf{2 つの実根 } \alpha,\ \beta\ (\alpha \neq \beta) \text{ をもつ場合} & x = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}, \\ \text{(ii)} & 2\text{ 次方程式 } (**) \text{ が } \textbf{1 つの重根 } \alpha \text{ をもつ場合} & x = (A + Bt)e^{\alpha t}, \\ \text{(iii)} & 2\text{ 次方程式 } (**) \text{ が } \textbf{2 つの虚根 } \mu \pm \omega i\ (\omega \neq 0) \text{ をもつ場合} & x = Ae^{\mu t}\cos\omega t + Be^{\mu t}\sin\omega t. \end{cases}$$

ただし，A, B は任意の定数である．

例． 微分方程式 $x'' - 4x' - 12x = 0$ を解け（一般解を求めよ）．

解答 (概要)． 微分方程式 $x'' - 4x' - 12x = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0,\quad \text{すなわち，} (\lambda - 6)(\lambda + 2) = 0. \tag{$***$}$$

2 次方程式 $(***)$ は **2 つの実根** $\lambda = 6, -2$ をもつ．したがって，一般解は $x = Ae^{6t} + Be^{-2t}$（A, B は任意の定数）． $\cdots$ (答)

問． 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ).

(i) $x'' - 4x = 0$　(ii) $x'' - 8x' + 16x = 0$　(iii) $x'' + 4x' + 5x = 0$

$n=3$ の場合

次の定数係数 3 階線形同次微分方程式を考える．

$$x''' + px'' + qx' + rx = 0. \tag{$\dagger$}$$

ただし，$p, q, r \in \mathbb{R}$ である．このとき，微分方程式 $(\dagger)$ の特性方程式は

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0. \tag{$\dagger\dagger$}$$

命題． 微分方程式 $(\dagger)$ の一般解は次の 4 通りに分類される．

$$\begin{cases} \text{(i)} & 3\text{ 次方程式 } (\dagger\dagger) \text{ が } \textbf{3 つの実根 } \alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha, \beta, \gamma \text{ は相異なる}) \text{ をもつ場合} & x = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} + Ce^{\gamma t}, \\ \text{(ii)} & 3\text{ 次方程式 } (\dagger\dagger) \text{ が } \textbf{1 つの実根 } \alpha \text{ と } \textbf{1 つの重根 } \beta\ (\alpha \neq \beta) \text{ をもつ場合} & x = Ae^{\alpha t} + (B + Ct)e^{\beta t}, \\ \text{(iii)} & 3\text{ 次方程式 } (\dagger\dagger) \text{ が } \textbf{1 つの重根 } \alpha \text{ をもつ場合} & x = (A + Bt + Ct^2)e^{\alpha t}. \end{cases}$$

さらに，3 次方程式 $(\dagger\dagger)$ が **1 つの実根** α と **2 つの虚根** $\mu \pm \omega i$ $(\omega \neq 0)$ をもつ場合，微分方程式 $(\dagger)$ の一般解は $x = Ae^{\alpha t} + Be^{\mu t}\cos\omega t + Ce^{\mu t}\sin\omega t$．ただし，$A, B, C$ は任意の定数である．

例． 微分方程式 $x''' + x = 0$ を解け（一般解を求めよ）．

解答 (概要)． 微分方程式 $x''' + x = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^3 + 1 = 0,\quad \text{すなわち，} (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0. \tag{$\dagger\dagger\dagger$}$$

3 次方程式 $(\dagger\dagger\dagger)$ は **1 つの実根** $\lambda = -1$ と **2 つの虚根** $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ をもつ．したがって，一般解は $x = Ae^{-t} + Be^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + Ce^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}$（$A, B, C$ は任意の定数）． $\cdots$ (答)

授業中に補えなかった項目は，復習を徹底しましょう．