

微分方程式 復習テスト 2016/12/05(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 16:20-17:50)

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である。

$$\begin{array}{lll} (1) x' = \sin x & (2) x' = te^{-(t^2+x)} & \\ (3) x'' + 6x' - 7x = 0 & (4) x'' + 6x' + 9x = 0 & (5) x'' + 6x' + 13x = 0 \end{array}$$

2. 次の初期値問題を解け。ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である。

$$\begin{array}{lll} (1) \begin{cases} x' = te^{-(t^2+x)} \\ x(0) = 0 \end{cases} & (2) \begin{cases} x'' + 6x' - 7x = 0 \\ x(0) = 3, x'(0) = 5 \end{cases} & (3) \begin{cases} x'' + 6x' + 9x = 0 \\ x(0) = 3, x'(0) = 5 \end{cases} \end{array}$$

注意．問 1(2)～(4) で得た結果を，証明無しに用いて良い。

3. 次の正方行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2) A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

4. 次の問に答えよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ とする。このとき，行列 } A \text{ の指数関数 } e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots \text{ を求めよ。}$$

$$(2) 2 \text{ 次元ベクトル値関数 } x = x(t) \text{ を未知関数とする連立微分方程式 } \frac{dx}{dt} = Ax \text{ の一般解を求めよ。}$$

注意．問 3(1) で得た結果を，証明無しに用いて良い。

5. 微分方程式 $x' = f(x)$, $f(x) = -x(x-1)(x-2)(x-3)$ について，次の問に答えよ。

$$(a) \text{ 関数 } f(x) \text{ の導関数 } \frac{df(x)}{dx} \text{ を求めよ。}$$

$$(b) \text{ 微分方程式 } x' = f(x) \text{ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ。}$$

$$(c) \text{ 初期条件 } x(0) = x_0 \text{ の下で，微分方程式 } x' = f(x) \text{ の解 } x = x(t) \text{ における } t \rightarrow +\infty \text{ の極限を初期値 } x_0 \text{ の場合分けにより求めよ。ただし，} x_0 \geq 0 \text{ である。}$$

注意．結論を得るまでの途中式過程を必ず明記し，読み手の立場に立ちながら論述を行いましょう。