

微分方程式 第 11 回復習テスト 問 1～問 4 解答

出題日：2016/12/05(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 16:20-17:50)

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

$$\begin{aligned} (1) \quad x' &= \sin x & (2) \quad x' &= te^{-(t^2+x)} \\ (3) \quad x'' + 6x' - 7x &= 0 & (4) \quad x'' + 6x' + 9x &= 0 & (5) \quad x'' + 6x' + 13x &= 0 \end{aligned}$$

解答. (1) $x = \cos^{-1} \left(\frac{2}{Ce^{2t} + 1} - 1 \right)$ あるいは $x = 2 \tan^{-1}(Ce^t)$ (C は任意定数), (2) $x = \log \left(C - \frac{1}{2}e^{-t^2} \right)$ (C は任意定数)
(3) $x = Ae^t + Be^{-7t}$, (4) $x = Ae^{-3t} + Bte^{-3t}$, (5) $x = Ae^{-3t} \cos 2t + Be^{-3t} \sin 2t$ (A, B は任意の定数)

2. 次の初期値問題を解け. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{cases} x' = te^{-(t^2+x)} \\ x(0) = 0 \end{cases} & (2) \quad \begin{cases} x'' + 6x' - 7x = 0 \\ x(0) = 3, x'(0) = 5 \end{cases} & (3) \quad \begin{cases} x'' + 6x' + 9x = 0 \\ x(0) = 3, x'(0) = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

解答. (1) $x = \log \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-t^2} \right)$, (2) $x = \frac{13}{4}e^t + \left(-\frac{1}{4} \right)e^{-7t} = \frac{13}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-7t}$, (3) $x = 3e^{-3t} + 14te^{-3t}$

3. 次の正方行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

解答. (1) A の固有値 λ は $\lambda = -1, 4$ であり,

(i) $\lambda = -1$ に属する A の固有ベクトル $u \neq 0$ は $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (あるいは, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ など),

(ii) $\lambda = 4$ に属する A の固有ベクトル $u \neq 0$ は $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (あるいは, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ など).

(2) A の固有値 λ は $\lambda = \sqrt{2} \pm 1$ ($\lambda = \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1$) であり,

(i) $\lambda = \sqrt{2} + 1$ に属する A の固有ベクトル $u \neq 0$ は $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (あるいは, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ など),

(ii) $\lambda = \sqrt{2} - 1$ に属する A の固有ベクトル $u \neq 0$ は $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. 次の問に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 行列 A の指数関数 $e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots$ を求めよ.

(2) 2次元ベクトル値関数 $x = x(t)$ を未知関数とする連立微分方程式 $\frac{dx}{dt} = Ax$ の一般解を求めよ.

解答. (1) 問 3(1) より, 正則行列 $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ および対角行列 $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, $P^{-1}AP = D$, すなわち, $A = PDP^{-1}$ より, $A^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}, \dots, A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}, \dots$ が成り立つので,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tPDP^{-1}} = I + t(PDP^{-1}) + \frac{t^2}{2}(PDP^{-1})^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}(PDP^{-1})^n + \cdots \\ &= I + tPDP^{-1} + \frac{t^2}{2}PD^2P^{-1} + \cdots + \frac{t^n}{n!}PD^nP^{-1} + \cdots \\ &= P \left(I + tD + \frac{t^2}{2}D^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}D^n + \cdots \right) P^{-1} = P \underbrace{e^{tD}} P^{-1} \end{aligned}$$

となることから,

$$e^{tA} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{-t} + 2e^{4t} & -2e^{-t} + 2e^{4t} \\ -3e^{-t} + 3e^{4t} & 2e^{-t} + 3e^{4t} \end{pmatrix}.$$

(2) $x = e^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \left\{ C_1 \begin{pmatrix} 3e^{-t} + 2e^{4t} \\ -3e^{-t} + 3e^{4t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2e^{-t} + 2e^{4t} \\ 2e^{-t} + 3e^{4t} \end{pmatrix} \right\}$ (C_1, C_2 は任意の定数).