目標

微分演算子 D の逆演算子 $\frac{1}{D}(=D^{-1})$ を用いた定数係数線形非斉次微分方程式の特殊解（p.195〜198）

1. 微分演算子 D

任意の関数 $x(=x(t))$ に対して，関数 Tx を対応させる規則 T が与えられているとする．このとき，T を**演算子**という．

定義（演算子の和，差および積）． $x(=x(t))$ を任意の関数とする．このとき，演算子 T, U に対して，その**和** $T+U$ および **差** $T-U$ を

$$(T+U)x = Tx + Ux,\ (T-U)x = Tx - Ux$$

とそれぞれ定義する．また，演算子 T, U の**積** TU を

$$(TU)x = T(Ux)$$

と定義する．

特に，関数 x に対して，その導関数 $Dx(=\frac{dx}{dt})$ を対応させる演算子 $D(=\frac{d}{dt})$ を**微分演算子**という．

命題（微分演算子 D の線形性）． $x_1(=x_1(t)), x_2(=x_2(t))$ を任意の関数とする．このとき，次の等式：

$$D(ax_1 \pm bx_2) = aDx_1 \pm bDx_2$$

が任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ．

注意． $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$ は自然数) とする．α の多項式 $P(\alpha)$ を

$$P(\alpha) := a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \tag{$*$}$$

と定義する．このとき，スカラー α の代わりに微分演算子 $D(=\frac{d}{dt})$ を $(*)$ 式に（形式的に）代入して得られる演算子：

$$P(D) := a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$$

も微分演算子である．

例． $a, b \in \mathbb{R}$ とする．このとき，微分演算子 $D-a, D-b$ の**積** $(D-a)(D-b)$ について次の等式：

$$(D-a)(D-b) = D^2 - (a+b)D + ab$$

が成り立つ．例えば

$$\begin{aligned}
(D-1)(D+3)(t^3+2t^2) =& (D^2+2D-3)(t^3+2t^2) \\
=& D^2(t^3+2t^2) + 2D(t^3+2t^2) - 3(t^3+2t^2) \\
=& \frac{d^2}{dt^2}(t^3+2t^2) + 2\frac{d}{dt}(t^3+2t^2) - 3(t^3+2t^2) \\
=& 6t + 4 + 2(3t^2+4t) - 3(t^3+2t^2) \\
=& -3t^3 + 14t + 4.
\end{aligned} \tag{$**$}$$

さらに，$(D-b)(D-a) = (D-a)(D-b)$ も成り立つ．すなわち，微分演算子 $D-a, D-b$ は演算子の積について**交換可能**である．例えば，$(**)$ の式変形と同様の方法により，次の等式：

$$(D-1)(D+3)(t^3+2t^2) = (D+3)(D-1)(t^3+2t^2)$$

も成り立つ．

2. 逆演算子 $\frac{1}{D}(=D^{-1})$

関数 x が与えられたとき，ある演算子 T が x に作用して，関数 y を用いて

$$y = Tx \tag{†}$$

と書けるとする．逆に関数 y が与えられたとき，(†) 式をみたすように x を対応させる演算子を，T の**逆演算子**とよび，$\frac{1}{T}$ あるいは T と書く．このとき，

$$x = \frac{1}{T}y,\quad \text{あるいは},\quad x = T^{-1}y$$

と書く．特に，関数 x に対して，その導関数 $Dx(=\frac{dx}{dt})$ を対応させる微分演算子 $D(=\frac{d}{dt})$ の **逆演算子 $\frac{1}{D}(=D^{-1})$** について，以下の式が成立する．

$$\frac{1}{D}f(t) = \int f(t)\ dt. \tag{††}$$

つまり，$\frac{1}{D}f(t)(=D^{-1}f(t))$ は関数 $f(t)$ を t で**積分**して得られる関数である．

命題． $k \in \mathbb{R}$ とする．このとき，微分演算子 $P(D)$ の逆演算子 $\frac{1}{P(D)}(=P(D)^{-1})$ に対して，以下の式が成立する．

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{P(D)}e^{kt} = \frac{1}{P(k)}e^{kt}\quad (P(k)\neq 0)\qquad \text{(ii)}\quad \frac{1}{P(D)}f(t) = e^{kt}\frac{1}{P(D+k)}[e^{-kt}f(t)] \tag{†††}$$

注意． 公式 (†††) は，**非斉次**微分方程式の特殊解を得る際に有用である．しかし，微分方程式 $x''-2x'+x=e^t$ の特殊解を求める場合など，(†††) の (i) 式が**適用できない**場合もある [**各自で具体的な理由を考えよう**].

注意． (†††) の (ii) 式に $P(D)=(D-k)^n$ を代入すると，$\frac{1}{P(D+k)} = \frac{1}{\{(D+k)-k\}^n} = \frac{1}{D^n}$ および (††) 式より

$$\frac{1}{(D-k)^n}f(t) = e^{kt}\underbrace{\iint\cdots\int}_{n\text{ 個}} e^{-kt}f(t)\ dt\cdots dtdt. \tag{††††}$$

ただし，(††††) 式右辺の積分記号は $\boldsymbol{n}$ **回積分**を重ねることを表す．

命題（演算子法による微分方程式の特殊解）． 次の定数係数線形非斉次微分方程式を考える．

$$P(D)x = f(t). \tag{‡}$$

このとき，(‡) 式の**特殊解**を $x_1(=x_1(t))$ とおくと，以下の式が成立する．

$$x_1 = \frac{1}{P(D)}f(t). \tag{‡‡}$$

例． 微分方程式 $x''-14x'+49x=t+1$ ($\Longleftrightarrow (D^2-14D+49)x=t+1$) の特殊解を求めよ．

解答（概要）． (‡‡) 式より，微分方程式 $x''-14x'+49x=t+1$ の特殊解は逆演算子を用いて次のように与えられる．

$$x = \frac{1}{D^2-14D+49}(t+1) = \frac{1}{(D-7)^2}(t+1).$$

はじめに，(††††) 式に $k=7$ および $f(t)=t+1$ を代入すると

$$\frac{1}{(D-7)^2}(t+1) = e^{7t}\iint e^{-7t}(t+1)\ dtdt\left(=e^{7t}\int\left(\int e^{-7t}(t+1)\ dt\right)dt\right).$$

次に，部分積分法 ($\int f_1'(t)f_2(t)dt = f_1(t)f_2(t) - \int f_1(t)f_2'(t)dt$) を用いると

$$\begin{aligned}
e^{7t}\iint e^{-7t}(t+1)\ dtdt &= e^{7t}\int\left\{-\frac{1}{7}e^{-7t}(t+1) - \int\left(-\frac{1}{7}e^{-7t}\right)(t+1)'\ dt\right\}dt && \text{(部分積分：1 回目)}\\
&= -\frac{1}{7}e^{7t}\int e^{-7t}\left(t+\frac{8}{7}\right)dt && \left(e^{7t}\int e^{-7t}g(t)dt = \int g(t)dt\ \text{は誤り}\right)\\
&= -\frac{1}{7}e^{7t}\left\{\left(-\frac{1}{7}e^{-7t}\right)\left(t+\frac{8}{7}\right) - \int\left(-\frac{1}{7}e^{-7t}\right)\left(t+\frac{8}{7}\right)'dt\right\} && \text{(部分積分：2 回目)}\\
&= -\frac{1}{7}e^{7t}\left(-\frac{1}{7}e^{-7t}\right)\left(t+\frac{9}{7}\right) = \frac{1}{49}\left(t+\frac{9}{7}\right).
\end{aligned}$$

したがって，微分方程式 $x''-14x'+49x=t+1$ の特殊解は $x = \frac{1}{49}\left(t+\frac{9}{7}\right)$. $\cdots$ (答)