

微分方程式 第2回レポート課題と解答

出題日：2016/10/10(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 16:20-17:50)

1. 次の変数分離形微分方程式を解け. ただし, $' = \frac{d}{dx}$ である.

$$(1) y' = -(1+x)e^y \qquad (2) y' = e^{-(x+y)}$$

解答 (概要). はじめに, $f_1(x) = -(1+x)$, $g_1(y) = e^y$ および $f_2(x) = e^{-x}$, $g_2(y) = e^{-y}$ とおくと,

$$(1) \iff y' = \underbrace{f_1(x)}_{(x \text{ だけの関数})} \underbrace{g_1(y)}_{(y \text{ だけの関数})}, \leftarrow$$

$$(2) \iff y' = \underbrace{f_2(x)}_{(x \text{ だけの関数})} \underbrace{g_2(y)}_{(y \text{ だけの関数})}, \leftarrow$$

と書けるので, 微分方程式 $y' = -(1+x)e^y$, $y' = e^{-(x+y)}$ はいずれも変数分離形である.

任意定数

(1) $\frac{dz}{dx} = -(1+x)e^z$
 $\Rightarrow e^{-z} \frac{dz}{dx} = -(1+x)$
 $\Rightarrow \int e^{-z} dz = -\int (1+x) dx$
 $\Rightarrow -e^{-z} = -\left(x + \frac{x^2}{2}\right) + C$
 $\therefore e^{-z} = x + \frac{x^2}{2} + C$ (Cと置き換えた)
 $\log e^{-z} = \log\left(x + \frac{x^2}{2} + C\right)$
 $\Rightarrow -z = \log\left(x + \frac{x^2}{2} + C\right)$
 $\therefore z = -\log\left(x + \frac{x^2}{2} + C\right)$

(2) $\frac{dz}{dx} = e^{-(x+z)} = e^{-x} \cdot e^{-z}$
 $\Rightarrow e^z \frac{dz}{dx} = e^{-x}$
 $\Rightarrow \int e^z dz = \int e^{-x} dx$
 $e^z = -e^{-x} + C$ ok!
 $\log e^z = \log(-e^{-x} + C)$
 $\therefore z = \log(-e^{-x} + C)$
 括弧の中, $y = \log(C - e^{-x})$.

講評および注意. (1) $y = -\log\left(x + \frac{x^2}{2} + C\right)$ に加えて, 次の一般解:

$$y = -\log\left\{x\left(1 + \frac{x}{2}\right) + C\right\}, \text{ あるいは } y = -\log\left\{\frac{1}{2}(1+x)^2 + C\right\}$$

も正答であるが, 任意定数 C を対数項の外側に出して書かれた解 $y = -\log\left\{x\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right\} + C$ や $y = -\log\left(x + \frac{x^2}{2}\right) + C$ は誤りである (実数 $a, b > 0$ に対して $\log(ab) = \log a + \log b$ は成り立つが, $\log(a+b) = \log a + \log b$ は一般に成り立たない). また, 任意定数 $-C$ を C と置き換えて得られる次の等式:

$$e^{-y} = x + \frac{x^2}{2} + C$$

の両辺の対数をとる際,

$$-y = \log\left(x + \frac{x^2}{2} + C\right) \text{ ではなく, } -y = \log\left|x + \frac{x^2}{2} + C\right|$$

といった形で, 括弧ではなく絶対値を用いてしまう誤答も見られた.

(2) 変数分離形の方法による, $e^y = -e^{-x} + C$ までの導出は大変良く出来ていた. しかし, 等式 $e^y = -e^{-x} + C$ の両辺の対数をとると, $y = -(-x) + C$, すなわち, $y = x + C$ とする解法も見られた. この解法も, 注意 (1) と同様の理由によって誤りである.

2. 次の問いに答えよ.

(1) 等式 $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{1-y}$ ($y \neq 0$ かつ $y \neq 1$) を満たす定数 a, b を求めよ (部分分数分解).

(2) 次の初期値問題:

$$\begin{cases} y' = y(1-y) & \dots \textcircled{1} \\ y(0) = \frac{2}{3} & \dots \textcircled{2} \end{cases} \quad (*)$$

を解け. ただし, $' = \frac{d}{dx}$ である.

解答 (概要).

$$\begin{aligned} \text{① } \frac{1}{y(1-y)} &= \frac{a}{y} + \frac{b}{1-y} \\ 1 &= (1-y)a + yb \\ \Leftrightarrow 0y + 1 &= (1-a+b)y + a \\ \therefore -a + b &= 0 \\ a &= (b) \quad b=1 \quad \therefore a=b=1. \end{aligned}$$

(2) $\frac{dy}{dx} = y(1-y)$ より

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx$$

2本と①) のように変形すると,

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = \int dx$$

$$\log \left| \frac{y}{1-y} \right| = x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\text{2本より, } \frac{y}{1-y} = C'e^x \quad (C' \text{ は任意定数})$$

$$\text{分母を移して } y = C'e^x(1-y) \quad \left(\frac{y}{1-y} = e^{x+C} \right)$$

$$y \text{ について解くと, } y = \frac{C'e^x}{1+C'e^x} \quad \left(\frac{y}{1-y} = e^{x+C} \right)$$

$$x=0 \text{ とすると, } y = \frac{2}{3} \text{ より}$$

$$\frac{C'}{1+C'} = \frac{2}{3} \quad \text{よって, } C' = 2$$

$$\text{したがって } y = \frac{2e^x}{1+2e^x} \quad \text{OK!}$$

Step 1
①による
一般解の
導出
↓
Step 2
初期条件による
任意定数Cの
決定

講評および注意. (1) y についての恒等式 $1 = (b-a)y + a$ ($\Leftrightarrow 0y + 1 = (b-a)y + a$) の係数比較を行えば良い. 多くの学生が適切に正答を得ていた.

(2) 変数分離形の方法による, (*) 式の一般解:

$$y = \frac{Ce^x}{1+Ce^x}, \quad y = \frac{1}{1+Ce^{-x}}, \quad \text{あるいは } y = \frac{e^{x+C}}{1+e^{x+C}}$$

の導出は大変良く出来ていた. 上の一般解に初期条件 $y(0) = \frac{2}{3}$, すなわち, $x=0, y = \frac{2}{3}$ を代入することで, 任意定数 C が決定され, 初期値問題が解かれる. 一方で, 一般解 $y = \frac{e^{x+C}}{1+e^{x+C}}$ に $x=0, y = \frac{2}{3}$ を代入し, $C = \log 2$ と任意定数を決定した後, 次の等式:

$$\frac{e^{x+\log 2}}{1+e^{x+\log 2}} = \frac{e^x e^{\log 2}}{1+e^x e^{\log 2}} = \frac{e^x \cdot 2}{1+e^x \cdot 2} = \frac{2e^x}{1+2e^x}$$

に着目せず, $y = \frac{2e^x}{1+2e^x}$ でなく, $e^{x+\log 2}$ を $2e^x$ に簡略化しないまま $y = \frac{e^{x+\log 2}}{1+e^{x+\log 2}}$ が解である, と完結する答案も見られた.