

微分方程式 第3回レポート課題と解答

出題日：2016/10/17(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 16:20-17:50)

1. 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式を満たす定数 a, b を求めよ (部分分数分解).

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2+x} + \frac{b}{2-x} \quad (*)$$

(2) 自励系の微分方程式 $x' = 4 - x^2$ の一般解を求めよ. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

(3) 次の初期値問題:

$$\begin{cases} x' = 4 - x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (**)$$

を解け. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

解答 (概要). (1) 以下の式変形により, 等式 (*) を以下の通りに x についての恒等式に書き直す.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2+x} + \frac{b}{2-x} &\iff 1 = a(2-x) + b(2+x) \\ &\iff 1 = (-2a+2b)x + 2a+2b \\ &\iff 0x + 1 = (-2a+2b)y + 2a+2b. \end{aligned} \quad (\dagger)$$

x についての恒等式 ($\dagger$) の係数比較を行うことで, 定数 a, b は次の方程式を満たす.

$$\begin{cases} -2a+2b=0, \\ 2a+2b=1. \end{cases}$$

したがって, $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{4}$ (答)

(2) はじめに, $x = \pm 2$ は微分方程式 $x' = 4 - x^2$ の解である. 次に, $x \neq \pm 2$ を満たす解を得る. $4 - x^2 = (2+x)(2-x)$ であることと (1) を用いた次の式変形:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = (2+x)(2-x) &\implies \frac{1}{(2+x)(2-x)} \frac{dx}{dt} = 1 \\ &\implies \int \frac{1}{(2+x)(2-x)} \frac{dx}{dt} dt = \int 1 dt \\ &\implies \int \frac{1}{(2+x)(2-x)} dx = \int 1 dt \\ &\implies \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{2+x} + \frac{\frac{1}{4}}{2-x} \right) dx = \int 1 dt \\ &\implies \int \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} \right) dx = \int 4 dt \\ &\implies \log|2+x| - \log|2-x| = 4t + C \\ &\implies \log \left| \frac{2+x}{2-x} \right| = 4t + C \\ &\implies \frac{2+x}{2-x} = \pm e^{4t+C} \\ &\implies \frac{2+x}{2-x} = C e^{4t} \quad (\pm e^C \text{ を } C \text{ に置き換えた}) \end{aligned} \quad (\dagger\dagger)$$

に加えて、任意の $C \in \mathbb{R}$ に対して $\pm e^C \neq 0$ であることより、求める解は

$$\begin{cases} \text{(i)} & \frac{2+x}{2-x} = Ce^{4t}, \text{ すなわち } x(t) = \frac{2(Ce^{4t}-1)}{1+Ce^{4t}} \quad (\text{ただし, } C \neq 0), \text{ あるいは,} \\ \text{(ii)} & \frac{2-x}{2+x} = Ce^{-4t}, \text{ すなわち } x(t) = \frac{2(1-Ce^{-4t})}{1+Ce^{-4t}} \quad (\text{ただし, } C \neq 0). \end{cases}$$

ここで、(ii) にあらわれる定数 $C \neq 0$ は、(i) にあらわれる定数 C を $\frac{1}{C}$ と置き換えたものである。一方、以下の定数関数：

$$\begin{cases} \text{(i)}^* & x(t) = -2 \quad (\text{(i) 式に } C = 0 \text{ を代入した関数}), \\ \text{(ii)}^* & x(t) = 2 \quad (\text{(ii) 式に } C = 0 \text{ を代入した関数}). \end{cases}$$

も微分方程式 $x' = 4 - x^2$ の解である。したがって、求める一般解は

$$x(t) = \frac{2(Ce^{4t}-1)}{1+Ce^{4t}}, \text{ あるいは, } x(t) = \frac{2(1-Ce^{-4t})}{1+Ce^{-4t}}.$$

ただし、 C は (0 も含めた) 任意の定数である。

… (答)

注意．初期条件を含まない微分方程式 $x' = 4 - x^2$ 単独を解く場合は、その一般解を $x(t) = \frac{2(Ce^{4t}-1)}{1+Ce^{4t}}$ あるいは $x(t) = \frac{2(1-Ce^{-4t})}{1+Ce^{-4t}}$ のいずれか一つとしても構わない。

(3) 次の 2 つのステップに分けて、初期値問題 (**) の解を得る。

Step 1 (任意の定数 C を用いた微分方程式 $x' = 4 - x^2$ の一般解の導出)。

(2) より、微分方程式 $x' = 4 - x^2$ の一般解は

$$x(t) = \frac{2(Ce^{4t}-1)}{1+Ce^{4t}}. \quad (\dagger\dagger)$$

ただし、 C は任意の定数である。

Step 2 (初期条件による C の決定)。

初期条件 $x(0) = 1$ より、 $t = 0$ を (††) 式に代入すると、

$$1 = \frac{2(Ce^{4 \cdot 0}-1)}{1+Ce^{4 \cdot 0}}, \text{ すなわち, } 1 = \frac{2(C-1)}{1+C}$$

であり、方程式 $1 = \frac{2(C-1)}{1+C}$ を C について解くと、 $C = 3$ 。

Steps 1, 2 より、 $C = 3$ を (††) 式に代入することで、初期値問題 (†) の解は

$$x(t) = \frac{2(3e^{4t}-1)}{1+3e^{4t}}$$

である。

… (答)

注意．Step 1 において、微分方程式 $x' = 4 - x^2$ の一般解を

$$x(t) = \frac{2(1-Ce^{-4t})}{1+Ce^{-4t}}$$

と選んでも、初期条件 $x(0) = 1$ を満たす任意の定数 C は $C = \frac{1}{3}$ となることから、初期値問題 (†) の解は

$$x(t) = \frac{2(1-\frac{1}{3}e^{-4t})}{1+\frac{1}{3}e^{-4t}} \quad (\dagger)$$

であり、(†) 式の両辺に $3e^{4t}$ をかけることで、 $x(t) = \frac{2(3e^{4t}-1)}{3e^{4t}+1}$ と書き直される。そのため、初期値問題 (†) の解はただ一つに定まる。