

微分方程式 第4回レポート課題と解答

出題日：2016/10/24(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 16:20-17:50)

1. 次の問いに答えよ．ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である．

(1) 次の微分方程式の平衡状態 (あるいは平衡点) を求めよ．ただし, $K > 0$ である．

$$(i) x' = x + 5 \quad (ii) x' = x - 2x^3 \quad (iii) x' = x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

解答 (概要) . (i) $\bar{x} + 5 = 0 \iff \bar{x} = -5$ より, 微分方程式 $x' = x + 5$ の平衡状態は $x = -5$ のみである (答)

(ii) $\bar{x} - 2\bar{x}^3 = 0 \iff \bar{x}(1 - 2\bar{x}^2) = 0 \iff \bar{x} = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ より, 微分方程式 $x' = x - 2x^3$ の平衡状態は $x = 0, x = \frac{1}{\sqrt{2}}, x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (あるいは $x = 0, x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$) の3つである (答)

(iii) $\bar{x}(1 - \frac{\bar{x}}{K}) = 0 \iff \bar{x} = 0, K$ より, 微分方程式 $x' = x(1 - \frac{x}{K})$ の平衡状態は $x = 0, x = K$ の2つである (答)

(2) 次の初期値問題 :

$$\begin{cases} x' = x \left(1 - \frac{x}{K}\right), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (*)$$

の解 $x = x(t)$ における $t \rightarrow +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ . ただし, $x_0 \geq 0$ である .

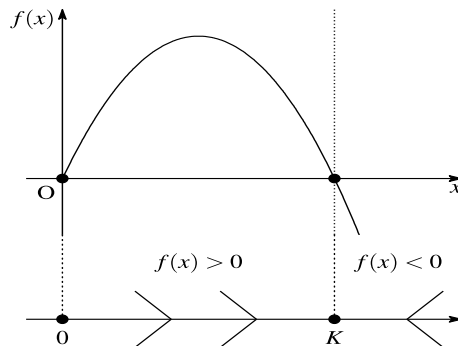
解答 . はじめに, 微分方程式 $x' = x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ の平衡状態は $x = 0, x = K$ であることから, 以下のことが成り立つ .

(i) $x_0 = 0 \implies x(t) \equiv 0 \ (t \geq 0)$ が成り立つことから, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ である .

(ii) $x_0 = K \implies x(t) \equiv K \ (t \geq 0)$ が成り立つことから, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = K$ である .

また, $f(x) = x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ とおくと, 微分方程式 $x' = f(x)$ に現れる関数 $f(x)$ の符号について, 以下のことが成り立つ .

(ii) $_{<K}$ $0 \leq x < K \implies f(x) > 0$ (すなわち, $\underline{x' > 0}$) (ii) $_{>K}$ $x > K \implies f(x) < 0$ (すなわち, $\underline{x' < 0}$)



ここで, 初期値問題 (*) の解 $x = x(t)$ における $t \rightarrow +\infty$ の極限について, $0 \leq x_0 < K$ ならば, $x(t)$ は増加傾向にあり, $x_0 > K$ ならば, $x(t)$ は減少傾向にある . 以上より, 次のことが成り立つ .

(ii) $_{<K}$ $0 \leq x_0 < K \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = K$ (ii) $_{>K}$ $x_0 > K \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = K$

したがって, (i) および (ii) $_{=K}$, (ii) $_{<K}$, (ii) $_{>K}$ より, 初期値 x_0 の場合分けによる解 x の極限は次の通りにまとめられる .

(i) $x_0 = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ (ii) $x_0 > 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = K$... (答)

(3) 微分方程式 $x' = x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ .

解答 . $f(x) = x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ とおくと, $f(x) = x - \frac{x^2}{K}$ より, $\frac{df(x)}{dx} = 1 - \frac{2x}{K}$ である . さらに, 微分方程式 $x' = f(x)$ の平衡状態 $x = 0, x = K$ における関数 $f(x)$ の微分係数 $\frac{df(x)}{dx}|_{x=0}, \frac{df(x)}{dx}|_{x=K}$ の符号にそれぞれ着目すると,

$$(a) \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} = 1 - \frac{2 \cdot 0}{K} = 1 > 0 \quad (b) \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=K} = 1 - \frac{2 \cdot K}{K} = -1 < 0$$

となることから, 2つの平衡状態 $x = 0, x = K$ の安定性は以下の通りにまとめられる .

(a) 平衡状態 $x = 0$ は不安定な平衡状態である . (b) 平衡状態 $x = K$ は安定な平衡状態である (答)