

微分方程式 レポート課題の解答

出題日：2018/09/24(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 17:10-18:50)

1. 次の関数 $f(t)$ の導関数 $f'(t)$ $\left(= \frac{df(t)}{dt} \right)$ を求めよ.

$$\begin{array}{lll} (1) f(t) = \cos t + t \sin 3t & (2) f(t) = e^{-3t} + te^{-3t} & (3) f(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ (4) f(t) = \cos^{-1} t & (5) f(t) = \frac{1}{t^2 + 3t + 2} & \end{array}$$

解答.

$$(1) f'(t) = \underline{-\sin t + \sin 3t + 3t \cos 3t}. \quad \dots \text{ (答)}$$

$$(2) f'(t) = -3e^{-3t} + (e^{-3t} - 3te^{-3t}) = \underline{-(3t+2)e^{-3t}}. \quad \dots \text{ (答)}$$

$$(3) f'(t) = t'(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} + t((1-t^2)^{-\frac{1}{2}})' = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} + t(-\frac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2t)). \quad \text{ここで,}$$

$$t \left(-\frac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2t) \right) = t \left(t(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} \right) = t^2(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\text{よって, } f'(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} + t(-\frac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2t)) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} + t^2(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} = (1-t^2)^{-\frac{3}{2}} \{ (1-t^2) + t^2 \} = \underline{(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}}. \quad \dots \text{ (答)}$$

$$(4) f'(t) = \underline{-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}. \quad \dots \text{ (答)} \quad (5) f'(t) = \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right)' = \underline{-\frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t+2)^2}} \left(\text{あるいは } -\frac{2t+3}{(t+1)^2(t+2)^2} \right). \quad \dots \text{ (答)}$$

2. 次の関数 $f(t)$ の原始関数 $\int f(t) dt$ を求めよ.

$$\begin{array}{lll} (1) f(t) = \cos t + t \sin 3t & (2) f(t) = e^{-3t} + te^{-3t} & (3) f(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ (4) f(t) = \cos^{-1} t & (5) f(t) = \frac{1}{t^2 + 3t + 2} & \end{array}$$

解答. C を任意の定数とする.

(1) 部分積分を用いると,

$$\int f(t) dt = \sin t + \int t \left(-\frac{1}{3} \cos 3t \right)' dt = \sin t + \left(t \left(-\frac{1}{3} \cos 3t \right) - \int \left(-\frac{1}{3} \cos 3t \right) dt \right) = \sin t + \left(-\frac{1}{3} t \cos 3t + \frac{1}{3} \int \cos 3t dt \right).$$

$$\text{したがって, } \int f(t) dt = \sin t - \underline{\frac{1}{3} t \cos 3t + \frac{1}{9} \sin 3t} + C. \quad \dots \text{ (答)}$$

(2) 部分積分を用いると,

$$\int f(t) dt = -\frac{1}{3} e^{-3t} + \int t \left(-\frac{1}{3} e^{-3t} \right)' dt = -\frac{1}{3} e^{-3t} + \left(t \left(-\frac{1}{3} e^{-3t} \right) - \int \left(-\frac{1}{3} e^{-3t} \right) dt \right).$$

$$\text{したがって, } \int f(t) dt = -\frac{1}{3} e^{-3t} - \frac{1}{3} t e^{-3t} - \frac{1}{9} e^{-3t} + C = \underline{-\left(\frac{1}{3} t + \frac{4}{9} \right) e^{-3t} + C}. \quad \dots \text{ (答)}$$

$$(3) t = \cos s \quad (0 < s < \pi) \quad \text{とおくと, } f(t(s)) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\cos s}{\sqrt{1-\cos^2 s}} = \frac{\cos s}{\sin s} \quad \text{かつ} \quad \frac{dt}{ds} = -\sin s \quad \text{より,}$$

$$\int f(t) dt = \int f(t(s)) \frac{dt}{ds} ds = \int \frac{\cos s}{\sin s} (-\sin s) ds = -\int \cos s ds = -\sin s + C = \underline{-\sqrt{1-t^2} + C}.$$

$$\text{したがって, } \int f(t) dt = \underline{-\sqrt{1-t^2} + C}. \quad \dots \text{ (答)}$$

(4) 部分積分を用いると,

$$\int f(t) dx = \int (t)' \cos^{-1} t dt = t \cos^{-1} t - \int t (\cos^{-1} t)' dt = t \cos^{-1} t - \int t \left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt = t \cos^{-1} t + \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

$$\text{したがって, (3) より, } \int f(t) dt = t \cos^{-1} t + \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \underline{t \cos^{-1} t - \sqrt{1-t^2}} + C. \quad \dots \text{ (答)}$$

$$(5) \int f(t) dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \underline{\log |t+1| - \log |t+2|} + C \quad \left(\text{あるいは } \log \left| \frac{t+1}{t+2} \right| + C \right). \quad \dots \text{ (答)}$$

3. 任意の定数 C_1, C_2 に対して、関数 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$ が次の式：

$$x''(t) + kx(t) = 0 \tag{*}$$

を満たすような実数 k の値を求めよ。 [各 10 点]

解答. $x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$ を (*) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} (*) &\iff (C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t)'' + k(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t) = 0 \\ &\iff -16C_1 \cos 4t - 16C_2 \sin 4t + k(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t) = 0 \\ &\iff C_1(k - 16) \cos 4t + C_2(k - 16) \sin 4t = 0. \end{aligned}$$

したがって、 $k = 16$ (答)

4. 任意の定数 C_1, C_2 に対して、関数 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t}$ が次の式：

$$x''(t) + k_1 x'(t) + k_2 x(t) = 0 \tag{**}$$

を満たすような実数 k_1, k_2 の値を求めよ。 [各 20 点]

解答. $x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t}$ を (**) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} (**) &\iff (C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t})'' + k_1(C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t})' + k_2(C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t}) = 0 \\ &\iff 16C_1 e^{4t} + 49C_2 e^{-7t} + k_1(4C_1 e^{4t} - 7C_2 e^{-7t}) + k_2(C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t}) = 0 \\ &\iff C_1(16 + 4k_1 + k_2)e^{4t} + C_2(49 - 7k_1 + k_2)e^{-7t} = 0. \end{aligned}$$

このことから、 k_1, k_2 は以下の連立方程式：

$$\begin{cases} 16 + 4k_1 + k_2 = 0, \\ 49 - 7k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

の解である。したがって、 $k_1 = 3, k_2 = -28$ (答)

5. 次の初期値問題：

$$\begin{cases} x'(t) = -7x(t), \\ x(0) = \frac{2}{3} \end{cases} \tag{***}$$

の解を求めよ。ただし、 $' = \frac{d}{dt}$ である。 [各 20 点]

解答. 2 つのステップに分けて、初期値問題の解を求めよう。

Step 1. 任意の定数 C を用いた $x'(t) = -7x(t)$ の（一般）解の導出

$x'(t) = -7x(t)$ を満たす解 $x = x(t)$ は

$$x = Ce^{-7t} \quad (C \text{ は任意の定数})$$

である。

Step 2. 初期条件 $x(0) = \frac{2}{3}$ による C の決定

Step 1 で得た解 $x = Ce^{-7t}$ に初期条件 $x(0) = \frac{2}{3}$ ，すなわち、 $t = 0, x = \frac{2}{3}$ を代入すると

$$\frac{2}{3} = Ce^{-7 \cdot 0} \iff \frac{2}{3} = C,$$

すなわち、 $C = \frac{2}{3}$ 。したがって、求める解は $x = \frac{2}{3}e^{-7t}$ である。 ... (答)