

§6.2. 一般の場合：定数係数 n 階線形 (同次) 微分方程式 (テキスト p.176-184) $n = 2$ の場合

次の定数係数 2 階線形同次微分方程式を考える.

$$x'' + px' + qx = 0. \quad (*)$$

ただし, $p, q \in \mathbb{R}$ である. このとき, 微分方程式 $(*)$ の特性方程式は

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (**)$$

命題. 微分方程式 $(*)$ の一般解は次の 3 通りに分類される.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & 2 \text{ 次方程式 } (**) \text{ が } \mathbf{2} \text{ つの実根 } \alpha, \beta \ (\alpha \neq \beta) \text{ をもつ場合} \quad x = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}, \\ \text{(ii)} & 2 \text{ 次方程式 } (**) \text{ が } \mathbf{1} \text{ つの重根 } \alpha \text{ をもつ場合} \quad x = (A + Bt)e^{\alpha t}, \\ \text{(iii)} & 2 \text{ 次方程式 } (**) \text{ が } \mathbf{2} \text{ つの虚根 } \mu \pm \omega i \ (\omega \neq 0) \text{ をもつ場合} \quad x = Ae^{\mu t} \cos \omega t + Be^{\mu t} \sin \omega t. \end{array} \right.$$

ただし, A, B は任意の定数である.

例. 微分方程式 $x'' - 4x' - 12x = 0$ を解け (一般解を求めよ).

解答 (概要). 微分方程式 $x'' - 4x' - 12x = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0, \text{ すなわち, } (\lambda - 6)(\lambda + 2) = 0. \quad (***)$$

2 次方程式 $(***)$ は **2 つの実根** $\lambda = 6, -2$ をもつ. したがって, 一般解は $x = Ae^{6t} + Be^{-2t}$ (A, B は任意定数). $\dots$ (答)

問. 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ).

$$\text{(i)} \ x'' - 4x = 0 \quad \text{(ii)} \ x'' - 8x' + 16x = 0 \quad \text{(iii)} \ x'' + 4x' + 5x = 0$$

 $n = 3$ の場合

次の定数係数 3 階線形同次微分方程式を考える.

$$x''' + px'' + qx' + rx = 0. \quad (\dagger)$$

ただし, $p, q, r \in \mathbb{R}$ である. このとき, 微分方程式 $(\dagger)$ の特性方程式は

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0. \quad (\dagger\dagger)$$

命題. 微分方程式 $(\dagger)$ の一般解は次の 4 通りに分類される.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & 3 \text{ 次方程式 } (\dagger\dagger) \text{ が } \mathbf{3} \text{ つの実根 } \alpha, \beta, \gamma \ (\alpha, \beta, \gamma \text{ は相異なる}) \text{ をもつ場合} \quad x = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} + Ce^{\gamma t}, \\ \text{(ii)} & 3 \text{ 次方程式 } (\dagger\dagger) \text{ が } \mathbf{1} \text{ つの実根 } \alpha \text{ と } \mathbf{1} \text{ つの重根 } \beta \ (\alpha \neq \beta) \text{ をもつ場合} \quad x = Ae^{\alpha t} + (B + Ct)e^{\beta t}, \\ \text{(iii)} & 3 \text{ 次方程式 } (\dagger\dagger) \text{ が } \mathbf{1} \text{ つの重根 } \alpha \text{ をもつ場合} \quad x = (A + Bt + Ct^2)e^{\alpha t}. \end{array} \right.$$

さらに, 3 次方程式 $(\dagger\dagger)$ が **1 つの実根** α と **2 つの虚根** $\mu \pm \omega i$ ($\omega \neq 0$) をもつ場合, 微分方程式 $(\dagger)$ の一般解は $x = Ae^{\alpha t} + Be^{\mu t} \cos \omega t + Ce^{\mu t} \sin \omega t$. ただし, A, B, C は任意の定数である.

例. 微分方程式 $x''' + x = 0$ を解け (一般解を求めよ).

解答 (概要). 微分方程式 $x''' + x = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^3 + 1 = 0, \text{ すなわち, } (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0. \quad (\dagger\dagger\dagger)$$

3 次方程式 $(\dagger\dagger\dagger)$ は **1 つの実根** $\lambda = -1$ と **2 つの虚根** $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ をもつ. したがって, 一般解は $x = Ae^{-t} + Be^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + Ce^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$ (A, B, C は任意の定数). $\dots$ (答)

授業中に補えなかった項目は, 復習を徹底しましょう.