

微分方程式 復習テスト 2018/12/10(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 17:10-18:50)

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

$$(1) x' = \sin x$$

$$(2) x' = te^{-(t^2+x)}$$

$$(3) x'' + 8x' - 9x = 0$$

$$(4) x'' + 8x' + 16x = 0$$

$$(5) x'' + 8x' + 25x = 0$$

2. 次の初期値問題を解け. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

$$(1) \begin{cases} x' = te^{-(t^2+x)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x'' + 8x' - 9x = 0 \\ x(0) = 5, x'(0) = -25 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x'' + 8x' + 16x = 0 \\ x(0) = 5, x'(0) = -25 \end{cases}$$

注意. 問 1(2)~(4) で得た結果を, 証明無しに用いて良い.

3. 次の正方行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 2017 & 1 \\ 1 & 2017 \end{pmatrix}$$

4. 次の問に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 行列 A の指数関数 $e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots$ を求めよ.

(2) 2次元ベクトル値関数 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ を未知関数とする連立微分方程式 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ の一般解を求めよ.

注意. 問 3(1) で得た結果を, 証明無しに用いて良い.

5. 微分方程式 $x' = f(x)$, $f(x) = -x(x+1)(x-1)(x-2)$ について, 次の問に答えよ.

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $\frac{df(x)}{dx}$ を求めよ.

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

(c) 初期条件 $x(0) = x_0$ の下で, 微分方程式 $x' = f(x)$ の解 $x = x(t)$ における $t \rightarrow +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ. ただし, $x_0 \geq 0$ である.

注意. 結論を得るまでの途中式過程を必ず明記し, 読み手の立場に立ちながら論述を行いましう.