微分方程式 復習テスト 解答

出題日：2018/12/10(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室，17:10-18:50)

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，$' = \dfrac{d}{dt}$ である． [(1) 10 点，(2) 10 点，(3) 10 点，(4) 10 点，(5) 10 点]

(1) $x' = \sin x$　(2) $x' = te^{-(t^2+x)}$　(3) $x'' + 8x' - 9x = 0$　(4) $x'' + 8x' + 16x = 0$　(5) $x'' + 8x' + 25x = 0$

解答． (1) $\sin x = 1 \cdot \sin x$ より, 微分方程式 $x' = \sin x$ は変数分離形なので

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \sin x &\implies \frac{1}{\sin x}\frac{dx}{dt} = 1 \quad \left(\text{あるいは } \frac{1}{\sin x}\ dx = 1\ dt\right) \\ &\implies \int \frac{1}{\sin x}\ dx = \int dt. \end{aligned}$$

ここで，以下の等式：

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} = \frac{\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x}\ dx = \int dt &\implies \frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right) dx = \int dt \\ &\implies \frac{1}{2}(\log|1-\cos x| - \log|1+\cos x|) = t + C \\ &\implies \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| = t + C \\ &\implies \log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| = 2t + C \quad (2C \text{ を } C \text{ に置き換えた}) \\ &\implies \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = Ce^{2t} \quad (\pm e^C \text{ を } C \text{ に置き換えた}). \qquad \cdots (\dagger) \end{aligned}$$

最後に，(†) 式の両辺を $(1+\cos x)$ 倍し，x について解くと，

$$\begin{aligned} 1-\cos x = Ce^{2t}(1+\cos x) &\iff (1+Ce^{2t})\cos x = 1 - Ce^{2t} \\ &\iff \cos x = \frac{1-Ce^{2t}}{1+Ce^{2t}} \\ &\iff x = \cos^{-1}\left(\frac{1-Ce^{2t}}{1+Ce^{2t}}\right). \end{aligned}$$

したがって，求める一般解は $x = \cos^{-1}\left(\dfrac{1-Ce^{2t}}{1+Ce^{2t}}\right)$ (C は任意の定数) である． $\cdots$ (答)

(2) $te^{-(t^2+x)} = te^{-t^2} \cdot \frac{1}{e^x}$ より, 微分方程式 $x' = te^{-(t^2+x)}$ は変数分離形なので

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = te^{-(t^2+x)} &\implies e^x\frac{dx}{dt} = te^{-t^2} \quad \left(\text{あるいは } e^x\ dx = te^{-t^2}\ dt\right) \\ &\implies \int e^x\ dx = \int te^{-t^2}\ dt \\ &\implies e^x = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + C \\ &\implies x = \log\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + C\right). \end{aligned}$$

したがって，求める一般解は $x = \log\left(-\dfrac{1}{2}e^{-t^2} + C\right)$ (C は任意の定数) である． $\cdots$ (答)

(3) $x'' + 8x' - 9x = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$ ($\iff (\lambda-1)(\lambda+9) = 0$) の根は $\lambda = 1, -9$ (相異なる 2 つの実根) である．したがって，一般解は $x = Ae^t + Be^{-9t}$ (A, B は任意の定数) である． $\cdots$ (答)

(4) $x'' + 8x' + 16x = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ ($\iff (\lambda+4)^2 = 0$) の根は $\lambda = -4$ (重根) である．したがって，一般解は $x = Ae^{-4t} + Bte^{-4t}$ (A, B は任意の定数) である． $\cdots$ (答)

(5) $x'' + 8x' + 25x = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$ ($\iff (\lambda+4)^2 + 3^2 = 0$) の根は $\lambda = -4 \pm 3i$ (相異なる 2 つの虚根) である．したがって，一般解は $y = Ae^{-4t}\cos 3t + Be^{-4t}\sin 3t$ (A, B は任意の定数) である． $\cdots$ (答)

2. 次の初期値問題を解け．ただし，$' = \dfrac{d}{dt}$ である． [(1) 5 点，(2) 5 点，(3) 5 点]

$$(1)\ \begin{cases} x' = te^{-(t^2+x)} \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x'' + 8x' - 9x = 0 \\ x(0) = 5,\ x'(0) = -25 \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} x'' + 8x' + 16x = 0 \\ x(0) = 5,\ x'(0) = -25 \end{cases}$$

解答． (1) **Step 1.** $x' = te^{-(t^2+x)}$ の一般解：問 1(2) より，$x = \log\left(-\dfrac{1}{2}e^{-t^2} + C\right)$ (C は任意の定数) である．

Step 2. C の決定：Step 1 で得た一般解 $x = \log(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + C)$ に初期条件 $x(0) = 0$，すなわち，$t = 0, x = 0$ を代入すると

$$0 = \log\left(-\frac{1}{2}e^{-0^2} + C\right) \iff 0 = \log\left(-\frac{1}{2} + C\right),\ \text{すなわち，}\ C = \frac{3}{2}.$$

したがって，$x = \log\left(-\dfrac{1}{2}e^{-t^2} + \dfrac{3}{2}\right)$ である． $\cdots$ (答)

(2) **Step 1.** $x'' + 8x' - 9x = 0$ の一般解：問 1(3) より，$x = Ae^t + Be^{-9t}$ (A, B は任意の定数) である．

Step 2. A, B の決定：$x = Ae^t + Be^{-9t}$ および $x' = Ae^t - 9Be^{-9t}$ に初期条件 $x(0) = 5, x'(0) = -25$ すなわち，$t = 0, x = 5, x' = -25$ を代入すると

$$\begin{cases} 5 = Ae^0 + Be^{-9\cdot 0} \\ -25 = Ae^0 - 9Be^{-9\cdot 0} \end{cases} \iff \begin{cases} 5 = A + B \\ -25 = A - 9B, \end{cases} \ \text{すなわち，}\ \begin{cases} A = 2 \\ B = 3. \end{cases}$$

したがって，$x = 2e^t + 3e^{-9t}$ である． $\cdots$ (答)

(3) **Step 1.** $x'' + 8x' + 16x = 0$ の一般解：問 1(3) より，$x = Ae^{-4t} + Bte^{-4t}$ (A, B は任意の定数) である．

Step 2. A, B の決定:(2) と同様に，$x = Ae^{-4t} + Bte^{-4t}$ および $x' = -4Ae^{-4t} + Be^{-4t} - 4Bte^{-4t}$ に初期条件 $x(0) = 5, x'(0) = -25$ すなわち，$t = 0, x = 5, x' = -25$ を代入すると

$$\begin{cases} 5 = Ae^{-4\cdot 0} + B\cdot 0e^{-4\cdot 0} \\ -25 = -4Ae^{-4\cdot 0} + Be^{-4\cdot 0} - 4B\cdot 0e^{-4\cdot 0} \end{cases} \iff \begin{cases} 5 = A \\ -25 = -4A + B, \end{cases} \ \text{すなわち，}\ \begin{cases} A = 5 \\ B = -5. \end{cases}$$

したがって，$x = 5e^{-4t} + (-5)te^{-4t}$，すなわち，$x = 5e^{-4t} - 5te^{-4t}$ である． $\cdots$ (答)

3. 次の正方行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ． [(1) 20 点，(2) 20 点]

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} 2017 & 1 \\ 1 & 2017 \end{pmatrix}$$

解答． (1) **Step 1.** 固有値 λ の導出：$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ より，

$$|A - \lambda I| = (1-\lambda)(2-\lambda) - 3\cdot 2 = \cdots = (\lambda+1)(\lambda-4)$$

であり，$|A - \lambda I| = 0$ を λ について解くと $\lambda = -1, 4$ となる．したがって，行列 A の固有値 λ は $\lambda = -1, 4$ である． $\cdots$ (答)

Step 2. 各固有値 λ に属する固有ベクトルの導出：

(i) $\lambda = -1$ の場合 $\cdots$ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} &\iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2u_1 + 3u_2 = 0 \\ 2u_1 + 3u_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff 2u_1 + 3u_2 = 0. \end{aligned} \tag{$*$}$$

ここで，$u_1 = c$ (c は任意の定数) とおき，$u_1 = c$ を ($*$) 式に代入すると $2c + 3u_2 = 0$，すなわち，$u_2 = -\frac{2}{3}c$．したがって，

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} c \\ -\frac{2}{3}c \end{pmatrix} = c\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}},\quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(ii) $\lambda = 4$ の場合 $\cdots$ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ より，

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} -3u_1 + 3u_2 = 0 \\ 2u_1 - 2u_2 = 0 \end{cases}$$
$$\iff 2u_1 - 2u_2 = 0. \qquad (**)$$

ここで，$u_1 = c$ (c は任意の定数) とおき，$u_1 = c$ を $(**)$ 式に代入すると $2c - 2u_2 = 0$，すなわち，$u_2 = c$．したがって，

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(i), (ii) より，$\lambda = -1$ に対する A の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$，$\lambda = 4$ に対する A の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である． $\cdots$ (答)

(2) (1) と同様の方法により，A の固有値 λ は $\lambda = 2016, 2018$ であり，

(i) $\lambda = 2016$ に属する A の固有ベクトル $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ は $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\left(\text{あるいは，} \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{など}\right)$，

(ii) $\lambda = 2018$ に属する A の固有ベクトル $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ は $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である． $\cdots$ (答)

4. 次の問に答えよ． [(1) 10 点，(2) 10 点]

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，行列 A の指数関数 $e^{tA} = I + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \dfrac{t^n}{n!}A^n + \cdots$ を求めよ．

(2) 2 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ を未知関数とする連立微分方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ の一般解を求めよ．

解答. (1) 問 3(1) より，正則行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$ および対角行列 $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ に対して，$P^{-1}AP = D$，すなわち，$A = PDP^{-1}$ より，$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}, \cdots, A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}, \cdots$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} e^{tA} = e^{tPDP^{-1}} &= I + t(PDP^{-1}) + \frac{t^2}{2}(PDP^{-1})^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}(PDP^{-1})^n + \cdots \\ &= I + tPDP^{-1} + \frac{t^2}{2}PD^2P^{-1} + \cdots + \frac{t^n}{n!}PD^nP^{-1} + \cdots \\ &= P\left(I + tD + \frac{t^2}{2}D^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}D^n + \cdots\right)P^{-1} \\ &= Pe^{tD}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}P^{-1} \end{aligned}$$

となることから，

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{1}{1\cdot 1 - 1\cdot(-\frac{2}{3})}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{5}\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{5}\begin{pmatrix} e^{-t} + \frac{2}{3}e^{4t} & -e^{-t} + e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{4t} & \frac{2}{3}e^{-t} + e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である． $\cdots$ (答)

(2) (1) より，$\boldsymbol{x} = e^{tA}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^{-t} + \frac{2}{3}e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{4t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -e^{-t} + e^{4t} \\ \frac{2}{3}e^{-t} + e^{4t} \end{pmatrix}$ (C_1, C_2 は任意の定数) である． $\cdots$ (答)

5. 微分方程式 $x' = f(x)$, $f(x) = -x(x+1)(x-1)(x-2)$ について，次の問に答えよ． [(a) 5 点，(b) 10 点，(c) 10 点]

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めよ．

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ．

(c) 初期条件 $x(0) = x_0$ の下で，微分方程式 $x' = f(x)$ の解 $x = x(t)$ における $t \to +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ．ただし，$x_0 \geq 0$ である．

解答. (a) $-x(x+1)(x-1)(x-2) = -x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x$ より，

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(-x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x) = -4x^3 + 6x^2 + 2x - 2. \qquad \cdots \text{(答)}$$

(b) $f(\overline{x}) = 0 \iff \underline{\underline{\overline{x} = -1,\ 0,\ 1,\ 2}}$ より，微分方程式 $x' = f(x)$ の平衡状態は $\underline{\underline{x = -1,\ x = 0,\ x = 1,\ x = -2}}$ の 4 つである．次に，4 つの平衡状態 $\underline{\underline{x = -1,\ x = 0,\ x = 1,\ x = -2}}$ における関数 $f(x)$ の微分係数の符号に着目すると，

$$\text{(i)}\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=-1} = -4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 2(-1) - 2 = 6 > 0$$

$$\text{(ii)}\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0} = -4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 2 = -2 < 0$$

$$\text{(iii)}\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=1} = -4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = 2 > 0$$

$$\text{(iv)}\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=2} = -4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = -6 < 0$$

となることから，4 つの平衡状態 $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ の安定性は以下の通りにまとめられる．

- (i) 平衡状態 $x = -1$ は不安定な平衡状態である．
- (ii) 平衡状態 $x = 0$ は安定な平衡状態である．
- (iii) 平衡状態 $x = 1$ は不安定な平衡状態である．
- (iv) 平衡状態 $x = 2$ は安定な平衡状態である．

$\cdots$ (答)

(c) はじめに，(b) より，微分方程式 $x' = f(x)$ の平衡状態は $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ であるが，$x_0 \geq 0$ の範囲に限られているため，平衡状態 $x = -1$ を除いた 3 つの平衡状態 $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ について考えると，以下の点が成り立つ．

(i) $x_0 = 0 \implies x(t) \equiv 0\ (t \geq 0)$ が成り立つことから，$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ である．

$\text{(ii)}_{=1}$ $x_0 = 1 \implies x(t) \equiv 1\ (t \geq 0)$ が成り立つことから，$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$ である．

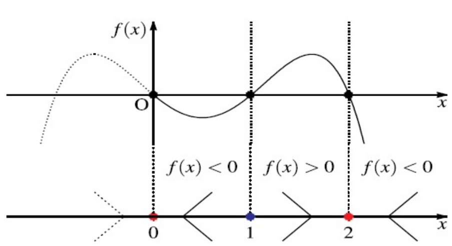
$\text{(iii)}_{=2}$ $x_0 = 2 \implies x(t) \equiv 2\ (t \geq 0)$ が成り立つことから，$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 2$ である．

また，微分方程式 $x' = f(x)$ に現れる関数 $f(x)$ の符号について，以下のことが成り立つ．

$\text{(ii)}_{<1}$ $0 < x < 1 \implies f(x) < 0$ (すなわち，$\underline{\underline{x' < 0}}$)

$\text{(ii)}_{>1}\&\text{(iii)}_{<2}$ $1 < x < 2 \implies f(x) > 0$ (すなわち，$x' > 0$)

$\text{(iii)}_{>2}$ $x > 2 \implies f(x) < 0$ (すなわち，$\underline{\underline{x' < 0}}$)



ここで，初期条件 $x(0) = x_0$ を含めた初期値問題 (∗) の解 $x = x(t)$ における $t \to +\infty$ の極限について，$0 \leq x_0 < 1$ あるいは $x_0 > 2$ ならば，$x(t)$ は減少傾向にあり，$1 < x_0 < 2$ ならば，$x(t)$ は増加傾向にある．以上より，次のことが成り立つ．

$$\begin{cases} \text{(ii)}_{<1} & 0 < x_0 < 1 & \implies \displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0 \\ \text{(ii)}_{>1}\&\text{(iii)}_{<2},\text{(iii)}_{>2} & 1 < x_0 < 2,\ x_0 > 2 & \implies \displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 2 \end{cases}$$

したがって，(i) および $\text{(ii)}_{=1}$，$\text{(iii)}_{=2}$ と併せて，初期値 x_0 の場合分けによる解 $x = x(t)$ の極限は次の通りにまとめられる．

(i) $0 \leq x_0 < 1 \implies \displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ (ii) $x_0 = 1 \implies \displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$ (iii) $x_0 > 1 \implies \displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 2$ $\cdots$ (答)