

微分方程式 第2回レポート課題と解答

出題日：2018/10/01(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 17:10-18:50)

1. 次の変数分離形微分方程式を解け. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

[各 30 点]

$$(1) x' = -(1+t)e^x \quad (2) x' = e^{-(t+x)}$$

解答 (概要). はじめに, $g_1(t) = -(1+t)$, $f_1(x) = e^x$ および $g_2(t) = e^{-t}$, $f_2(x) = e^{-x}$ とおくと,

$$(1) \iff x' = \underline{g_1(t)} \underline{f_1(x)}, \leftarrow \underline{(t \text{ だけの関数})} \times \underline{(x \text{ だけの関数})}$$

$$(2) \iff x' = \underline{g_2(t)} \underline{f_2(x)} \leftarrow \underline{(t \text{ だけの関数})} \times \underline{(x \text{ だけの関数})}$$

と書けるので, 微分方程式 $x' = -(1+t)e^x$, $x' = e^{-(t+x)}$ はいずれも変数分離形である.

(1) 微分方程式 $x' = -(1+t)e^x$ は変数分離形なので

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1+t) \cdot (-e^x) \implies -e^{-x} \frac{dx}{dt} = 1+t \quad (\text{あるいは } -e^{-x} dx = (1+t) dt) \\ &\implies \int (-e^{-x}) dx = \int (1+t) dt \\ &\implies e^{-x} = t + \frac{1}{2}t^2 + C \\ &\implies -x = \log\left(t + \frac{1}{2}t^2 + C\right). \end{aligned}$$

したがって, 求める一般解は $x = -\log\left(t + \frac{1}{2}t^2 + C\right)$ (C は任意の定数) である.

... (答)

(2) 微分方程式 $x' = e^{-(t+x)}$ は変数分離形なので

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e^{-t} \cdot e^{-x} \implies e^x \frac{dx}{dt} = e^{-t} \quad (\text{あるいは } e^x dx = e^{-t} dt) \\ &\implies \int e^x dx = \int e^{-t} dt \\ &\implies e^x = -e^{-t} + C \\ &\implies x = \log(C - e^{-t}). \end{aligned}$$

したがって, 求める一般解は $x = \log(C - e^{-t})$ (C は任意の定数) である.

... (答)

講評および注意. (1) $x = -\log\left(t + \frac{t^2}{2} + C\right)$ に加えて, 次の一般解:

$$x = -\log\left(t\left(1 + \frac{t}{2}\right) + C\right), x = -\log\left(\frac{1}{2}(1+t)^2 + C\right), \text{あるいは } x = \log\frac{1}{t + \frac{t^2}{2} + C}$$

も正答であるが, 任意定数 C を対数項の外側に出して書かれた解 $x = -\log(t(1 + \frac{t}{2})) + C$ や $x = -\log(t + \frac{t^2}{2}) + C$ は誤りである (実数 $a, b > 0$ に対して $\log(ab) = \log a + \log b$ は成り立つが, $\log(a+b) = \log a + \log b$ は一般に成り立たない). また, 途中式変形の過程で得られる等式:

$$e^{-x} = t + \frac{t^2}{2} + C$$

の両辺の対数をとる際,

$$-x = \log\left(t + \frac{t^2}{2} + C\right) \quad \text{ではなく,} \quad -x = \log\left|t + \frac{t^2}{2} + C\right|$$

といった形で, 括弧ではなく絶対値を用いてしまう誤答も見られた.

(2) 変数分離形の方法による, $e^x = -e^{-t} + C$ までの導出は大変良く出来ていた. しかし, 「等式 $e^x = -e^{-t} + C$ の両辺の対数をとると, $x = -(-t) + C$, すなわち, $x = t + C$ 」とする解法も見られた. この解法も, 注意 (1) と同様の理由によって誤りである.

2. 次の問いに答えよ.

[(1) 10 点, (2) 30 点]

(1) 次の等式を満たす定数 a, b を求めよ (部分分数分解).

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$$

(2) 次の初期値問題を解け. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

$$\begin{cases} x' = x(1-x) \\ x(0) = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (*)$$

解答 (概要). (1) 両辺を $x(1-x)$ 倍すると

$$\begin{aligned} 1 &= a(1-x) + bx \iff 1 = (-a+b)x + a \\ &\iff 0x + 1 = (-a+b)x + a, \end{aligned}$$

すなわち, $-a+b=0$, $a=1$ を解くと, $a=1, b=1$ (答)

(2) [Step 1. 一般解の導出]

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(1-x)} \frac{dx}{dt} = 1 &\implies \int \frac{1}{x(1-x)} \frac{dx}{dt} dt = \int dt \quad \left(\text{あるいは } \frac{dx}{x(1-x)} = dt \right) \\ &\iff \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt \\ &\iff \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \int dt \quad (\because (1) \text{ 式}) \\ &\iff \log|x| - \log|1-x| = t + C \\ &\iff \log \left| \frac{x}{1-x} \right| = t + C \\ &\iff \frac{x}{1-x} = Ce^t \quad (\pm e^C \text{ を } C \text{ と置き換えた}) \\ &\iff \frac{1}{1-x} - 1 = Ce^t, \\ &\iff \frac{1}{1-x} = Ce^t + 1, \end{aligned}$$

すなわち, (*) 式の一般解は $x = 1 - \frac{1}{Ce^t + 1}$ (C は任意定数).

[Step 2. 任意定数 C の決定]

一般解 $x = 1 - \frac{1}{Ce^t + 1}$ に初期条件 $x(0) = \frac{2}{3}$, すなわち, $t=0, x=\frac{2}{3}$ を代入すると

$$x = 1 - \frac{1}{Ce^t + 1} \iff \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{C+1},$$

すなわち, $C=2$. 以上より, (*) 式の解は $x = 1 - \frac{1}{2e^t + 1}$ (あるいは $x = \frac{2e^t}{2e^t + 1}$). ... (答)

講評および注意. (2) 変数分離形の方法による, (*) 式の一般解:

$$x = \frac{Ce^t}{1+Ce^t}, \quad x = \frac{1}{1+Ce^{-t}}, \quad \text{あるいは } x = \frac{e^{t+C}}{1+e^{t+C}}$$

の導出は大変良く出来ていた. 上の一般解に初期条件 $x(0) = \frac{2}{3}$, すなわち, $t=0, x=\frac{2}{3}$ を代入することで, 任意定数 C が決定され, 初期値問題が解かれる. 一方で, 一般解 $x = \frac{e^{t+C}}{1+e^{t+C}}$ に $t=0, x=\frac{2}{3}$ を代入し, $C = \log 2$ と任意定数を決定した後, 次の等式:

$$\frac{e^{t+\log 2}}{1+e^{t+\log 2}} = \frac{e^t e^{\log 2}}{1+e^t e^{\log 2}} = \frac{e^t \cdot 2}{1+e^t \cdot 2} = \frac{2e^t}{1+2e^t}$$

に着目せず, $x = \frac{2e^t}{1+2e^t}$ でなく, $e^{t+\log 2}$ を $2e^t$ に簡略化しないまま $x = \frac{e^{t+\log 2}}{1+e^{t+\log 2}}$ が解である, と結論付ける答案も見られた.