微分方程式　第 3 回レポート課題と解答

出題日：2018/10/08(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室，17:10-18:50)

1. 次の問いに答えよ．

(1) 次の等式を満たす定数 a，b を求めよ **(部分分数分解)**．

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2+x} + \frac{b}{2-x} \tag{$*$}$$

(2) 自励系の微分方程式 $x' = 4 - x^2$ の一般解を求めよ．ただし，$' = \dfrac{d}{dt}$ である．

(3) 次の初期値問題：

$$\begin{cases} x' = 4 - x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{$**$}$$

を解け．ただし，$' = \dfrac{d}{dt}$ である．

解答 (概要). (1) 以下の式変形により，等式 $(*)$ を以下の通りに x についての恒等式に書き直す．

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2+x} + \frac{b}{2-x} &\iff 1 = a(2-x) + b(2+x) \\ &\iff 1 = (-2a+2b)x + 2a + 2b \\ &\iff 0x + 1 = (-2a+2b)y + 2a + 2b. \end{aligned} \tag{$\dagger$}$$

x についての恒等式 $(\dagger)$ の係数比較を行うことで，定数 a, b は次の方程式を満たす．

$$\begin{cases} -2a + 2b = 0, \\ 2a + 2b = 1. \end{cases}$$

したがって，$a = \dfrac{1}{4}$，$b = \dfrac{1}{4}$．　$\cdots$ (答)

(2) はじめに，$x = \pm 2$ は微分方程式 $x' = 4 - x^2$ の解である．次に，$x \neq \pm 2$ を満たす解を得る．$4 - x^2 = (2+x)(2-x)$ であることと (1) を用いた次の式変形：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = (2+x)(2-x) &\implies \frac{1}{(2+x)(2-x)}\frac{dx}{dt} = 1 \\ &\implies \int \frac{1}{(2+x)(2-x)}\frac{dx}{dt}\,dt = \int 1\,dt \\ &\implies \int \frac{1}{(2+x)(2-x)}\,dx = \int 1\,dt \\ &\implies \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{2+x} + \frac{\frac{1}{4}}{2-x}\right) dx = \int 1\,dt \\ &\implies \int \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\right) dx = \int 4\,dt \\ &\implies \log|2+x| - \log|2-x| = 4t + C \\ &\implies \log\left|\frac{2+x}{2-x}\right| = 4t + C \\ &\implies \frac{2+x}{2-x} = \pm e^{4t+C} \\ &\implies \frac{2+x}{2-x} = Ce^{4t} \quad \text{($\pm e^C$ を C に置き換えた)} \end{aligned} \tag{$\dagger\dagger$}$$

に加えて，任意の $C \in \mathbb{R}$ に対して $\pm e^C \neq 0$ であることより，求める解は

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \dfrac{2+x}{2-x} = Ce^{4t}, \text{ すなわち, } x(t) = \dfrac{2(Ce^{4t}-1)}{1+Ce^{4t}} \quad (\text{ただし, } C \neq 0), \text{ あるいは,} \\ \text{(ii)} \quad \dfrac{2-x}{2+x} = Ce^{-4t}, \text{ すなわち, } x(t) = \dfrac{2(1-Ce^{-4t})}{1+Ce^{-4t}} \quad (\text{ただし, } C \neq 0). \end{cases}$$

ここで，(ii) にあらわれる定数 $C \neq 0$ は，(i) にあらわれる定数 C を $\frac{1}{C}$ と置き換えたものである．一方，以下の定数関数：

$$\begin{cases} \text{(i)}^\star \ \ x(t) = -2 \ \ ((\text{i}) \text{ 式に } C = 0 \text{ を代入した関数}), \\ \text{(ii)}^\star \ \ x(t) = 2 \quad ((\text{ii}) \text{ 式に } C = 0 \text{ を代入した関数}). \end{cases}$$

も微分方程式 $x' = 4 - x^2$ の解である．したがって，求める一般解は

$$x(t) = \frac{2(Ce^{4t}-1)}{1+Ce^{4t}}, \quad \text{あるいは,} \quad x(t) = \frac{2(1-Ce^{-4t})}{1+Ce^{-4t}}.$$

ただし，C は（$C = 0$ の場合も含めた）任意の定数である． $\cdots$（答）

注意. 初期条件を含まない微分方程式 $x' = 4 - x^2$ 単独を解く場合は，その一般解を $x(t) = \dfrac{2(Ce^{4t}-1)}{1+Ce^{4t}}$ あるいは $x(t) = \dfrac{2(1-Ce^{-4t})}{1+Ce^{-4t}}$ のいずれか一つとしても構わない．

(3) 次の 2 つのステップに分けて，初期値問題 $(**)$ の解を得る．

Step 1 (任意の定数 C を用いた微分方程式 $x' = 4 - x^2$ の一般解の導出).

(2) より，微分方程式 $x' = 4 - x^2$ の一般解は

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{2(Ce^{4t}-1)}{1+Ce^{4t}}}}. \tag{†††}$$

ただし，C は任意の定数である．

Step 2 (初期条件による C の決定).

初期条件 $x(0) = 1$ より，$t = 0$ を (†††) 式に代入すると，

$$1 = \frac{2(Ce^{4\cdot 0}-1)}{1+Ce^{4\cdot 0}}, \quad \text{すなわち,} \quad 1 = \frac{2(C-1)}{1+C}$$

であり，方程式 $1 = \frac{2(C-1)}{1+C}$ を C について解くと，$\underline{\underline{C = 3}}$.

Steps 1, 2 より，$C = 3$ を (†††) 式に代入することで，初期値問題 (††) の解は

$$x(t) = \frac{2(3e^{4t}-1)}{1+3e^{4t}}$$

である． $\cdots$（答）

注意. Step 1 において，微分方程式 $x' = 4 - x^2$ の一般解を

$$x(t) = \frac{2(1-Ce^{-4t})}{1+Ce^{-4t}}$$

と選んでも，初期条件 $x(0) = 1$ を満たす任意の定数 C は $C = \frac{1}{3}$ となることから，初期値問題 (††) の解は

$$x(t) = \frac{2(1-\frac{1}{3}e^{-4t})}{1+\frac{1}{3}e^{-4t}} \tag{‡}$$

であり，(‡) 式の両辺に $3e^{4t}$ をかけることで，$x(t) = \dfrac{2(3e^{4t}-1)}{3e^{4t}+1}$ と書き直される．そのため，初期値問題 (††) の解はただ一つに定まる．