

微分方程式 第5回レポート課題と解答

出題日：2018/10/22(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 17:10-18:50)

1. 次の問いに答えよ. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

(1) 次の微分方程式の平衡状態 (あるいは平衡点) を求めよ. ただし, $r, K > 0$ である.

$$(i) x' = 2x - 7 \quad (ii) x' = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (iii) x' = x - 4x^3$$

解答 (概要). (i) $2\bar{x} - 7 = 0 \iff \bar{x} = \frac{7}{2}$ より, 微分方程式 $x' = 2x - 7$ の平衡状態は $x = \frac{7}{2}$ のみである. ... (答)

(ii) $r\bar{x}(1 - \frac{\bar{x}}{K}) = 0 \iff \bar{x} = 0, K$ より, 微分方程式 $x' = rx(1 - \frac{x}{K})$ の平衡状態は $\underline{x=0, x=K}$ の2つである. ... (答)

(iii) $\bar{x} - 4\bar{x}^3 = 0 \iff \bar{x}(1 - 4\bar{x}^2) = 0 \iff \bar{x} = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ より, 微分方程式 $x' = x - 4x^3$ の平衡状態は $x = 0, x = \frac{1}{2}, x = -\frac{1}{2}$ (あるいは $x = 0, x = \pm\frac{1}{2}$) の3つである. ... (答)

(2) 微分方程式 $x' = f(x), f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ について, 次の問いに答えよ. ただし, $r, K > 0$ である.

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $\frac{df(x)}{dx}$ を求めよ.

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

解答. (a) $f(x) = x - \frac{x^2}{K}$ より, $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(x - \frac{x^2}{K}\right) = 1 - \frac{2x}{K}$ である. ... (答)

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の平衡状態 $\underline{x=0, x=K}$ における関数 $f(x)$ の微分係数の符号に着目すると,

$$(i) \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} = 1 - \frac{2 \cdot 0}{K} = 1 > 0 \quad (ii) \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=K} = 1 - \frac{2 \cdot K}{K} = -1 < 0$$

となることから, 2つの平衡状態 $x = 0, x = K$ の安定性は以下の通りにまとめられる.

$$\begin{cases} (i) \text{ 平衡状態 } x = 0 \text{ は不安定な平衡状態である.} \\ (ii) \text{ 平衡状態 } x = K \text{ は安定な平衡状態である.} \end{cases} \quad \dots \text{ (答)}$$

(3) 微分方程式 $x' = f(x), f(x) = x - 4x^3$ について, 次の問いに答えよ.

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $\frac{df(x)}{dx}$ を求めよ.

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

解答. (a) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x - 4x^3) = 1 - 12x^2$ である. ... (答)

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の平衡状態 $\underline{x=0, x=\frac{1}{2}, x=-\frac{1}{2}}$ における関数 $f(x)$ の微分係数の符号に着目すると,

$$\begin{aligned} (i) \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} &= 1 - 12 \cdot 0^2 = 1 > 0 \\ (ii) \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\frac{1}{2}} &= 1 - 12 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - 3 = -2 < 0 \\ (iii) \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=-\frac{1}{2}} &= 1 - 12 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - 3 = -2 < 0 \end{aligned}$$

となることから, 3つの平衡状態 $x = 0, x = \frac{1}{2}, x = -\frac{1}{2}$ の安定性は以下の通りにまとめられる.

$$\begin{cases} (i) \text{ 平衡状態 } x = 0 \text{ は不安定な平衡状態である.} \\ (ii) \text{ 平衡状態 } x = \frac{1}{2} \text{ は安定な平衡状態である.} \\ (iii) \text{ 平衡状態 } x = -\frac{1}{2} \text{ は安定な平衡状態である.} \end{cases} \quad \dots \text{ (答)}$$