微分方程式　レポート課題　2018/10/29(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室，17:10-18:50)

1. C を任意の定数とした以下の曲線群が満たす微分方程式を求めよ．ただし，$' = \dfrac{d}{dt}$ である．

(例) $x = (t - C)^2$ $\qquad\cdots(*)$

(解) $(*)$ 式の両辺を t について微分した式 $x' = 2(t - C)$, すなわち, $t - C = \dfrac{x'}{2}$ を $(*)$ 式に代入すると，$x = \left(\dfrac{x'}{2}\right)^2$，すなわち，$(x')^2 = 4x$ となる．　$\cdots$ (答)

(1) $x = (7t - C)^2$　(2) $x = Ce^{-t^4}$　(3) $x = t^3 - Ct$　(4) $x = \tan(t + C)$

2. 次の問いに答えよ．ただし，$' = \dfrac{d}{dt}$ である．

(1) 次の微分方程式の平衡状態（あるいは平衡点）を求めよ．ただし，$r, K > 0$ である．

(例) $x' = 3x^2 - 1$

(答) 微分方程式 $x' = 3x^2 - 1$ の平衡状態は $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(\text{平衡点は } \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ である．

(i) $x' = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$　(ii) $x' = x - x^3$　(iii) $x' = -x(x - 1)(x - 2)$

(2) 微分方程式 $x' = f(x)$, $f(x) = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ について，次の問に答えよ．ただし，$r, K > 0$ である．

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ．

(c) 初期条件 $x(0) = x_0$ の下で，微分方程式 $x' = f(x)$ の解 $x = x(t)$ における $t \to +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ．ただし，$x_0 \geq 0$ である．

(3) 微分方程式 $x' = f(x)$, $f(x) = x - x^3$ について，次の問に答えよ．

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ．

(c) 初期条件 $x(0) = x_0$ の下で，微分方程式 $x' = f(x)$ の解 $x = x(t)$ における $t \to +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ．ただし，$x_0 \geq 0$ である．

(4) 微分方程式 $x' = f(x)$, $f(x) = -x(x - 1)(x - 2)$ について，次の問に答えよ．

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ．

(c) 初期条件 $x(0) = x_0$ の下で，微分方程式 $x' = f(x)$ の解 $x = x(t)$ における $t \to +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ．ただし，$x_0 \geq 0$ である．

注意． 結論を得るまでの途中式過程を必ず明記し，読み手の立場に立ちながら論述を行いましょう．