

微分方程式 第 6 回レポート課題と解答

出題日：2018/10/29(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 17:10-18:50)

1. C を任意の定数とした以下の曲線群が満たす微分方程式を求めよ. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である. [各 4 点]

$$(1) x = (7t - C)^2 \quad (2) x = Ce^{-t^4} \quad (3) x = t^3 - Ct \quad (4) x = \tan(t + C)$$

解答 (概要). (1) $x = (7t - C)^2$ の両辺を t について微分すると,

$$x' = 2(7t - C) \cdot 7 = 14(7t - C), \text{ すなわち, } 7t - C = \frac{x'}{14}. \quad (*)$$

(*) 式を元の微分方程式 $x = (7t - C)^2$ に代入すると, $x = (\frac{x'}{14})^2$, すなわち, $(x')^2 = 196x$ となる. ... (答)

(2) $x = Ce^{-t^4}$ の両辺を t について微分すると,

$$x' = -4t^3 Ce^{-t^4}, \text{ すなわち, } C = -\frac{x' e^{t^4}}{4t^3}. \quad (**)$$

(**) 式を元の微分方程式 $x = Ce^{-t^4}$ に代入すると, $x = -\frac{x'}{4t^3}$, すなわち, $x' = -4t^3 x$ となる. ... (答)

(3) $x = t^3 - Ct$ の両辺を t について微分すると,

$$x' = 3t^2 - C, \text{ すなわち, } C = 3t^2 - x', \quad (*3)$$

$$x'' = 6t, \text{ すなわち, } t = \frac{x''}{6}. \quad (*4)$$

(*3), (*4) 式を元の微分方程式 $x = t^3 - Ct$ に代入すると,

$$x = \left(\frac{x''}{6}\right)^3 - (3t^2 - x')\frac{x''}{6},$$

すなわち,

$$x = \left(\frac{x''}{6}\right)^3 - \left(3\left(\frac{x''}{6}\right)^2 - x'\right)\frac{x''}{6}$$

となる. ... (答)

注意. $(\frac{x''}{6})^3 - (3(\frac{x''}{6})^2 - x')\frac{x''}{6} = \frac{x'x''}{6} - 2(\frac{x''}{6})^3$ より, $x = \frac{x'x''}{6} - 2(\frac{x''}{6})^3$ と結論付けても良い.

(4) $x = \tan(t + C)$ の両辺を t について微分すると,

$$x' = \frac{1}{\cos^2(t + C)}, \text{ すなわち, } x' = 1 + \tan^2(t + C). \quad (*5)$$

(*5) 式を元の微分方程式 $x = \tan(t + C)$ に代入すると, $x' = 1 + x^2$ となる. ... (答)

2. 次の問いに答えよ. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

(1) 次の微分方程式の平衡状態 (あるいは平衡点) を求めよ. ただし, $r, K > 0$ である. [各 3 点]

$$(i) x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (ii) x' = x - x^3 \quad (iii) x' = -x(x - 1)(x - 2)$$

解答. (i) $rx^*(1 - \frac{x^*}{K}) = 0$ を解くと, $x^* = 0, K$. よって, 平衡状態は $x(t) = 0, x(t) = K$ の 2 つである. ... (答)

(ii) $x^* - (x^*)^3 = 0$ を解くと, $x^* = 0, \pm 1$. よって, 平衡状態は $x(t) = 0, x(t) = \pm 1$ の 3 つである. ... (答)

(iii) $-x^*(x^* - 1)(x^* - 2) = 0$ を解くと, $x^* = 0, 1, 2$. よって, 平衡状態は $x(t) = 0, x(t) = 1, x(t) = 2$ の 3 つである. ... (答)

(2) 微分方程式 $x' = f(x)$, $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, $r, K > 0$ について, 次の間に答えよ. [(a) 5 点, (b) 10 点, (c) 10 点]

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

(c) 初期条件 $x(0) = x_0 \geq 0$ の下で, $x' = f(x)$ の解 $x = x(t)$ における $t \rightarrow +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ.

解答. (a) $f(x) = x - \frac{x^2}{K}$ より, $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^2}{K}\right) = 1 - \frac{2x}{K}$ である. ... (答)

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の平衡状態 $\underline{x=0}$, $\underline{x=K}$ における関数 $f(x)$ の微分係数の符号に着目すると,

$$(i) \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} = 1 - \frac{2 \cdot 0}{K} = 1 > 0 \quad (ii) \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=K} = 1 - \frac{2 \cdot K}{K} = -1 < 0$$

となることから, 2 つの平衡状態 $x = 0$, $x = K$ の安定性は以下の通りにまとめられる.

$$\begin{cases} (i) \text{ 平衡状態 } x = 0 \text{ は不安定な平衡状態である.} \\ (ii) \text{ 平衡状態 } x = K \text{ は安定な平衡状態である.} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(c) 結論のみ述べると, 以下の 2 通りに解の漸近挙動が分かれる.

$$\begin{cases} \cdot x_0 = 0 \text{ のときのみ, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \text{ である.} \\ \cdot x_0 > 0 \text{ のとき, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = K \text{ である.} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(3) 微分方程式 $x' = f(x)$, $f(x) = x - x^3$ について, 次の間に答えよ. [(a) 5 点, (b) 10 点, (c) 10 点]

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

(c) 初期条件 $x(0) = x_0 \geq 0$ の下で, $x' = f(x)$ の解 $x = x(t)$ における $t \rightarrow +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ.

解答. (a) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x - x^3) = 1 - 3x^2$ である. ... (答)

(b) 結論のみ述べると, 3 つの平衡状態 $\underline{x=0}$, $\underline{x=1}$, $\underline{x=-1}$ の安定性は以下の通りにまとめられる.

$$\begin{cases} (i) \text{ 平衡状態 } x = 0 \text{ は不安定な平衡状態である.} \\ (ii) \text{ 平衡状態 } x = 1 \text{ は安定な平衡状態である.} \\ (iii) \text{ 平衡状態 } x = -1 \text{ は安定な平衡状態である.} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(c) 結論のみ述べると, 以下の 2 通りに解の漸近挙動が分かれる.

$$\begin{cases} \cdot x_0 = 0 \text{ のときのみ, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \text{ である.} \\ \cdot x_0 > 0 \text{ のとき, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1 \text{ である.} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(4) 微分方程式 $x' = f(x)$, $f(x) = -x(x-1)(x-2)$ について, 次の間に答えよ. [(a) 5 点, (b) 10 点, (c) 10 点]

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

(c) 初期条件 $x(0) = x_0 \geq 0$ の下で, $x' = f(x)$ の解 $x = x(t)$ における $t \rightarrow +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ.

解答. (a) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(-x(x-1)(x-2)) = -3x^2 + 6x - 2$ である. ... (答)

(b) 結論のみ述べると, 3 つの平衡状態 $\underline{x=0}$, $\underline{x=1}$, $\underline{x=2}$ の安定性は以下の通りにまとめられる.

$$\begin{cases} (i) \text{ 平衡状態 } x = 0 \text{ は安定な平衡状態である.} \\ (ii) \text{ 平衡状態 } x = 1 \text{ は不安定な平衡状態である.} \\ (iii) \text{ 平衡状態 } x = 2 \text{ は安定な平衡状態である.} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(c) 結論のみ述べると, 以下の 3 通りに解の漸近挙動が分かれる.

$$\begin{cases} \cdot 0 \leq x_0 < 1 \text{ のとき, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \text{ である.} \\ \cdot x_0 = 1 \text{ のときのみ, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1 \text{ である.} \\ \cdot x_0 > 1 \text{ のとき, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 2 \text{ である.} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$