微分方程式　レポート課題の解答

出題日：2019/09/23(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室，17:10-18:50)

1. 次の関数 $f(t)$ の導関数 $f'(t)\left(=\dfrac{df(t)}{dt}\right)$ を求めよ．

$$(1)\ f(t)=\cos t+t\sin 3t \qquad (2)\ f(t)=e^{-3t}+te^{-3t} \qquad (3)\ f(t)=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$(4)\ f(t)=\cos^{-1}t \qquad (5)\ f(t)=\frac{1}{t^2+3t+2}$$

解答.

(1) $f'(t)=\underline{-\sin t+\sin 3t+3t\cos 3t}$.　…（答）

(2) $f'(t)=-3e^{-3t}+(e^{-3t}-3te^{-3t})=\underline{-(3t+2)e^{-3t}}$.　…（答）

(3) $f'(t)=t'(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}+t((1-t^2)^{-\frac{1}{2}})'=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}+t(-\frac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2t))$．ここで，

$$t\left(-\frac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2t)\right)=t\left(t(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}\right)=t^2(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

よって，$f'(t)=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}+t(-\frac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2t))=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}+t^2(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}=(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}\{(1-t^2)+t^2\}=\underline{(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}}$.

…（答）

(4) $f'(t)=\underline{-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}}$.　…（答）　(5) $f'(t)=\left(\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{1}{t+2}\right)'=\underline{-\dfrac{1}{(t+1)^2}+\dfrac{1}{(t+2)^2}}$ $\left(\text{あるいは}\ \underline{-\dfrac{2t+3}{(t+1)^2(t+2)^2}}\right)$.　…（答）

2. 次の関数 $f(t)$ の原始関数 $\displaystyle\int f(t)\ dt$ を求めよ．

$$(1)\ f(t)=\cos t+t\sin 3t \qquad (2)\ f(t)=e^{-3t}+te^{-3t} \qquad (3)\ f(t)=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$(4)\ f(t)=\cos^{-1}t \qquad (5)\ f(t)=\frac{1}{t^2+3t+2}$$

解答. C を任意の定数とする．

(1) 部分積分を用いると，

$$\int f(t)\ dt=\sin t+\int t\left(-\frac{1}{3}\cos 3t\right)'\ dt=\sin t+\left(t\left(-\frac{1}{3}\cos 3t\right)-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3t\right)dt\right)=\sin t+\left(-\frac{1}{3}t\cos 3t+\frac{1}{3}\int\cos 3t\ dt\right).$$

したがって，$\displaystyle\int f(t)\ dt=\underline{\sin t-\frac{1}{3}t\cos 3t+\frac{1}{9}\sin 3t+C}$.　…（答）

(2) 部分積分を用いると，

$$\int f(t)\ dt=-\frac{1}{3}e^{-3t}+\int t\left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\right)'\ dt=-\frac{1}{3}e^{-3t}+\left(t\left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\right)-\int\left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\right)dt\right).$$

したがって，$\displaystyle\int f(t)\ dt=-\frac{1}{3}e^{-3t}-\frac{1}{3}te^{-3t}-\frac{1}{9}e^{-3t}+C=\underline{-\left(\frac{1}{3}t+\frac{4}{9}\right)e^{-3t}+C}$.　…（答）

(3) $t=\cos s\ (0<s<\pi)$ とおくと，$f(t(s))=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{\cos s}{\sqrt{1-\cos^2 s}}=\dfrac{\cos s}{\sin s}$ かつ $\dfrac{dt}{ds}=-\sin s$ より，

$$\int f(t)\ dt=\int f(t(s))\frac{dt}{ds}\ ds=\int\frac{\cos s}{\sin s}(-\sin s)\ ds=-\int\cos s\ ds=-\sin s+C=-\sqrt{1-t^2}+C.$$

したがって，$\displaystyle\int f(t)\ dt=\underline{-\sqrt{1-t^2}+C}$.　…（答）

(4) 部分積分を用いると，

$$\int f(t)\ dx=\int(t)'\cos^{-1}t\ dt=t\cos^{-1}t-\int t(\cos^{-1}t)'\ dt=t\cos^{-1}t-\int t\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt=t\cos^{-1}t+\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\ dt.$$

したがって，(3) より，$\displaystyle\int f(t)\ dt=t\cos^{-1}t+\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\ dt=\underline{t\cos^{-1}t-\sqrt{1-t^2}+C}$.　…（答）

(5) $\displaystyle\int f(t)\ dt=\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\underline{\log|t+1|-\log|t+2|+C}$ $\left(\text{あるいは}\ \underline{\log\left|\dfrac{t+1}{t+2}\right|+C}\right)$.　…（答）

3. 任意の定数 C_1, C_2 に対して，関数 $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$ が次の式：

$$x''(t) + kx(t) = 0 \tag{$*$}$$

を満たすような実数 k の値を求めよ． [各 10 点]

解答． $x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$ を $(*)$ 式に代入すると，

$$\begin{aligned}(*) &\iff (C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t)'' + k(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t) = 0 \\ &\iff -16C_1 \cos 4t - 16C_2 \sin 4t + k(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t) = 0 \\ &\iff C_1(k-16)\cos 4t + C_2(k-16)\sin 4t = 0.\end{aligned}$$

したがって，$k = 16$. $\cdots$（答）

4. 任意の定数 C_1, C_2 に対して，関数 $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t}$ が次の式：

$$x''(t) + k_1 x'(t) + k_2 x(t) = 0 \tag{$**$}$$

を満たすような実数 k_1, k_2 の値を求めよ． [各 20 点]

解答． $x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t}$ を $(**)$ 式に代入すると，

$$\begin{aligned}(**) &\iff (C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t})'' + k_1(C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t})' + k_2(C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t}) = 0 \\ &\iff 16C_1 e^{4t} + 49C_2 e^{-7t} + k_1(4C_1 e^{4t} - 7C_2 e^{-7t}) + k_2(C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t}) = 0 \\ &\iff C_1(16 + 4k_1 + k_2)e^{4t} + C_2(49 - 7k_1 + k_2)e^{-7t} = 0.\end{aligned}$$

このことから，k_1, k_2 は以下の連立方程式：

$$\begin{cases} 16 + 4k_1 + k_2 = 0, \\ 49 - 7k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

の解である．したがって，$k_1 = 3,\ k_2 = -28$. $\cdots$（答）

5. 次の初期値問題：

$$\begin{cases} x'(t) = -7x(t), \\ x(0) = \dfrac{2}{3} \end{cases} \tag{$***$}$$

の解を求めよ．ただし，$' = \dfrac{d}{dt}$ である． [各 20 点]

解答． 2 つのステップに分けて，初期値問題の解を求めよう．

Step 1. 任意の定数 C を用いた $x'(t) = -7x(t)$ の（一般）解の導出

$x'(t) = -7x(t)$ を満たす解 $x = x(t)$ は

$$x = Ce^{-7t} \quad (C \text{ は任意の定数})$$

である．

Step 2. 初期条件 $x(0) = \dfrac{2}{3}$ による C の決定

Step 1 で得た解 $x = Ce^{-7t}$ に初期条件 $x(0) = \dfrac{2}{3}$，すなわち，$t = 0,\ x = \dfrac{2}{3}$ を代入すると

$$\frac{2}{3} = Ce^{-7\cdot 0} \iff \frac{2}{3} = C,$$

すなわち，$C = \dfrac{2}{3}$．したがって，求める解は $x = \dfrac{2}{3}e^{-7t}$ である． $\cdots$（答）