§7.2.2. 定数変化法による 2 階線形非斉次微分方程式の一般解（テキスト p.197-202）

例． 次の微分方程式：

$$x'' + 4x' + 3x = e^{7t} \tag{$*$}$$

の一般解を求めよ．

解答． 次の 2 つの Step により，$(*)$ 式の一般解を得る．

Step 1　斉次方程式 $x'' + 4x' + 3x = e^{7t} = 0$ の一般解

対応する特性方程式：

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0,\quad すなわち，\ (\lambda+1)(\lambda+3) = 0$$

の根 λ が $\lambda = -1, -3$（相異なる 2 つの実数）であることから，$x = Ae^{-t} + Be^{-3t}$（A, B は任意の定数）．

Step 2　定数変化法による元の非斉次方程式の一般解

Step 1 で得た斉次方程式 $x'' + 4x' + 3x = 0$ の解 $x = Ae^{-t} + Be^{-3t}$ に現れる任意定数 A, B に対する置き換え操作：

(1) 定数 A を関数 $\xi(t)$ へ置き換える　　(2) 定数 B を関数 $\eta(t)$ へ置き換える

によって得られる関数：

$$x = \xi(t)e^{-t} + \eta(t)e^{-3t}$$

を元の微分方程式 $(*)$ に代入して一般解を求めるために，はじめに $x'(=\frac{dx}{dt})$ を計算すると，

$$x' = \xi'(t)e^{-t} - \xi(t)e^{-t} + \eta'(t)e^{-3t} - 3\eta(t)e^{-3t}. \tag{$**$}$$

ここで，$(**)$ 式の右辺に着目して，**ξ, η の 1 階導関数から成る以下の条件：**

$$\xi'(t)e^{-t} + \eta'(t)e^{-3t} = 0 \tag{$***$}$$

を与えると，$x' = -\xi(t)e^{-t} - 3\eta(t)e^{-3t}$ である．次に，x'' を計算すると，

$$\begin{aligned} x'' &= (-\xi(t)e^{-t} - 3\eta(t)e^{-3t})' \\ &= -\xi'(t)e^{-t} + \xi(t)e^{-t} - 3\eta'(t)e^{-3t} + 9\eta(t)e^{-3t} \end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} (*) &\iff (-\xi'(t)e^{-t} + \xi(t)e^{-t} - 3\eta'(t)e^{-3t} + 9\eta(t)e^{-3t}) + 4(-\xi(t)e^{-t} - 3\eta(t)e^{-3t}) + 3(\xi(t)e^{-t} + \eta(t)e^{-3t}) = e^{7t} \\ &\iff -\xi'(t)e^{-t} - 3\eta'(t)e^{-3t} = e^{7t}. \end{aligned} \tag{$****$}$$

$(***)$ 式および $(****)$ 式をまとめた式：

$$\begin{cases} \underline{\underline{\xi'(t)e^{-t}}} + \underline{\eta'(t)e^{-3t}} = 0, \\ -\underline{\underline{\xi'(t)e^{-t}}} - 3\underline{\eta'(t)e^{-3t}} = e^{7t} \end{cases}$$

を $\xi'(t), \eta'(t)$ について解くと，

$$\underline{\underline{\xi'(t)e^{-t}}} = \frac{1}{2}e^{7t},\quad \underline{\eta'(t)e^{-3t}} = -\frac{1}{2}e^{7t},$$

すなわち，

$$\xi'(t) = \frac{1}{2}e^{8t},\quad \eta'(t) = -\frac{1}{2}e^{10t}$$

より，C_1, C_2 を任意の定数として，

$$\xi(t) = \frac{1}{2}\int e^{8t}\,dt = \frac{1}{16}e^{8t} + C_1,\quad \eta(t) = -\frac{1}{2}\int e^{10t}\,dt = -\frac{1}{20}e^{10t} + C_2$$

となるので，

$$x = \left(\frac{1}{16}e^{8t} + C_1\right)e^{-t} + \left(-\frac{1}{20}e^{10t} + C_2\right)e^{-3t} = \frac{1}{80}e^{7t} + C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}.$$

したがって，求める一般解は $x = \dfrac{1}{80}e^{7t} + C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}$（$C_1, C_2$ は任意の定数）．　$\cdots$（答）