微分方程式　第 2 回レポート課題と解答

出題日：2019/09/30(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室，17:10-18:50)

1. 次の変数分離形微分方程式を解け．ただし，$' = \dfrac{d}{dt}$ である．　[各 30 点]

(1) $x' = -(1+t)e^x$　　　(2) $x' = e^{-(t+x)}$

解答 (概要).　はじめに，$g_1(t) = -(1+t)$, $f_1(x) = e^x$ および $g_2(t) = e^{-t}$, $f_2(x) = e^{-x}$ とおくと，

$$(1) \iff x' = \underline{g_1(t)}\,\underline{f_1(x)}, \longleftarrow \underline{(t\text{ だけの関数})} \times \underline{(x\text{ だけの関数})}$$

$$(2) \iff x' = \underline{g_2(t)}\,\underline{f_2(x)} \longleftarrow \underline{(t\text{ だけの関数})} \times \underline{(x\text{ だけの関数})}$$

と書けるので，微分方程式 $x' = -(1+t)e^x$, $x' = e^{-(t+x)}$ はいずれも変数分離形である．

(1) 微分方程式 $x' = -(1+t)e^x$ は変数分離形なので

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = (1+t)\cdot(-e^x) &\implies -e^{-x}\frac{dx}{dt} = 1+t \quad \left(\text{あるいは } -e^{-x}\,dx = (1+t)\,dt\right)\\ &\implies \int(-e^{-x})\,dx = \int(1+t)\,dt\\ &\implies e^{-x} = t + \frac{1}{2}t^2 + C\\ &\implies -x = \log\left(t+\frac{1}{2}t^2+C\right).\end{aligned}$$

したがって，求める一般解は $x = -\log\left(t+\dfrac{1}{2}t^2+C\right)$ (C は任意の定数) である．　$\cdots$ (答)

(2) 微分方程式 $x' = e^{-(t+x)}$ は変数分離形なので

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = e^{-t}\cdot e^{-x} &\implies e^x\frac{dx}{dt} = e^{-t} \quad \left(\text{あるいは } e^x\,dx = e^{-t}\,dt\right)\\ &\implies \int e^x\,dx = \int e^{-t}\,dt\\ &\implies e^x = -e^{-t} + C\\ &\implies x = \log(C - e^{-t}).\end{aligned}$$

したがって，求める一般解は $x = \log(C - e^{-t})$ (C は任意の定数) である．　$\cdots$ (答)

講評および注意. (1) $x = -\log\left(t+\dfrac{t^2}{2}+C\right)$ に加えて，次の一般解：

$$x = -\log\left(t\left(1+\frac{t}{2}\right)+C\right),\ x = -\log\left(\frac{1}{2}(1+t)^2+C\right),\ \text{あるいは } x = \log\frac{1}{t+\frac{t^2}{2}+C}$$

も正答であるが，任意定数 C を対数項の外側に出して書かれた解 $x = -\log(t(1+\frac{t}{2}))+C$ や $x = -\log(t+\frac{t^2}{2})+C$ は誤りである (実数 $a, b > 0$ に対して $\log(ab) = \log a + \log b$ は成り立つが，$\log(a+b) = \log a + \log b$ は一般に成り立たない)．また，途中式変形の過程で得られる等式：

$$e^{-x} = t + \frac{t^2}{2} + C$$

の両辺の対数をとる際，

$$-x = \log\left(t+\frac{t^2}{2}+C\right) \quad \text{ではなく，} -x = \log\left|t+\frac{t^2}{2}+C\right|$$

といった形で，括弧ではなく絶対値を用いてしまう誤答も見られた．

(2) 変数分離形の方法による，$e^x = -e^{-t}+C$ までの導出は大変良く出来ていた．しかし,「等式 $e^x = -e^{-t}+C$ の両辺の対数をとると，$x = -(-t)+C$，すなわち，$x = t+C$」とする解法も見られた．この解法も，注意 (1) と同様の理由によって誤りである.

2. 次の問いに答えよ． [(1) 10 点，(2) 30 点]

(1) 次の等式を満たす定数 a，b を求めよ **(部分分数分解)**．

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$$

(2) 次の初期値問題を解け．ただし，$' = \dfrac{d}{dt}$ である．

$$\begin{cases} x' = x(1-x) \\ x(0) = \dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad (*)$$

解答 (概要). (1) 両辺を $x(1-x)$ 倍すると

$$\begin{aligned} 1 = a(1-x) + bx &\iff 1 = (-a+b)x + a \\ &\iff 0x + 1 = (-a+b)x + a, \end{aligned}$$

すなわち，$-a+b=0$，$a=1$ を解くと，$a=1$，$b=1$． $\cdots$ (答)

(2) **[Step 1. 一般解の導出]**

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(1-x)}\frac{dx}{dt} = 1 \quad &\Longrightarrow \int \frac{1}{x(1-x)}\frac{dx}{dt}\,dt = \int dt \qquad \left(\text{あるいは } \frac{dx}{x(1-x)} = dt\right) \\ &\iff \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt \\ &\iff \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \int\ dt \qquad (\because (1)\ \text{式}) \\ &\iff \log|x| - \log|1-x| = t + C \\ &\iff \log\left|\frac{x}{1-x}\right| = t + C \\ &\iff \frac{x}{1-x} = Ce^t \qquad\qquad (\pm e^C \text{ を } C \text{ と置き換えた}) \\ &\iff \frac{1}{1-x} - 1 = Ce^t, \\ &\iff \frac{1}{1-x} = Ce^t + 1, \end{aligned}$$

すなわち，$(*)$ 式の一般解は $x = 1 - \dfrac{1}{Ce^t+1}$ (C は任意定数)．

[Step 2. 任意定数 C の決定]

一般解 $x = 1 - \dfrac{1}{Ce^t+1}$ に初期条件 $x(0) = \dfrac{2}{3}$，すなわち，$t=0$，$x=\dfrac{2}{3}$ を代入すると

$$x = 1 - \frac{1}{Ce^t+1} \iff \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{C+1},$$

すなわち，$C=2$．以上より，$(*)$ 式の解は $x = 1 - \dfrac{1}{2e^t+1}$ $\left(\text{あるいは } x = \dfrac{2e^t}{2e^t+1}\right)$． $\cdots$ (答)

講評および注意. (2) 変数分離形の方法による，$(*)$ 式の一般解：

$$x = \frac{Ce^t}{1+Ce^t},\ x = \frac{1}{1+Ce^{-t}},\ \text{あるいは } x = \frac{e^{t+C}}{1+e^{t+C}}$$

の導出は大変良く出来ていた．上の一般解に初期条件 $x(0) = \frac{2}{3}$，すなわち，$t=0$，$x=\frac{2}{3}$ を代入することで，任意定数 C が決定され，初期値問題が解かれる．一方で，一般解 $x = \frac{e^{t+C}}{1+e^{t+C}}$ に $t=0$，$x=\frac{2}{3}$ を代入し，$C = \log 2$ と任意定数を決定した後，次の等式：

$$\frac{e^{t+\log 2}}{1+e^{t+\log 2}} = \frac{e^t e^{\log 2}}{1+e^t e^{\log 2}} = \frac{e^t\cdot 2}{1+e^t\cdot 2} = \frac{2e^t}{1+2e^t}$$

に着目せず，$x = \frac{2e^t}{1+2e^t}$ でなく，$e^{t+\log 2}$ を $2e^t$ に簡略化しないまま $x = \frac{e^{t+\log 2}}{1+e^{t+\log 2}}$ が解である，と結論付ける答案も見られた．