

# 微分方程式 第3回レポート課題と解答

出題日：2019/10/14(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 17:10-18:50)

1. 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式を満たす定数  $a, b$  を求めよ (部分分数分解).

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2+x} + \frac{b}{2-x} \quad (*)$$

(2) 自励系の微分方程式  $x' = 4 - x^2$  の一般解を求めよ. ただし,  $' = \frac{d}{dt}$  である.

(3) 次の初期値問題:

$$\begin{cases} x' = 4 - x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (**)$$

を解け. ただし,  $' = \frac{d}{dt}$  である.

解答 (概要). (1) 以下の式変形により, 等式 (\*) を以下の通りに  $x$  についての恒等式に書き直す.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2+x} + \frac{b}{2-x} &\iff 1 = a(2-x) + b(2+x) \\ &\iff 1 = (-2a+2b)x + 2a+2b \\ &\iff 0x + 1 = (-2a+2b)y + 2a+2b. \end{aligned} \quad (\dagger)$$

$x$  についての恒等式  $(\dagger)$  の係数比較を行うことで, 定数  $a, b$  は次の方程式を満たす.

$$\begin{cases} -2a+2b = 0, \\ 2a+2b = 1. \end{cases}$$

したがって,  $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{4}$ . ... (答)

(2) はじめに,  $x = \pm 2$  は微分方程式  $x' = 4 - x^2$  の解である. 次に,  $x \neq \pm 2$  を満たす解を得る.  $4 - x^2 = (2+x)(2-x)$  であることと (1) を用いた次の式変形:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = (2+x)(2-x) &\implies \frac{1}{(2+x)(2-x)} \frac{dx}{dt} = 1 \\ &\implies \int \frac{1}{(2+x)(2-x)} \frac{dx}{dt} dt = \int 1 dt \\ &\implies \int \frac{1}{(2+x)(2-x)} dx = \int 1 dt \\ &\implies \int \left( \frac{\frac{1}{4}}{2+x} + \frac{\frac{1}{4}}{2-x} \right) dx = \int 1 dt \\ &\implies \int \left( \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} \right) dx = \int 4 dt \\ &\implies \log|2+x| - \log|2-x| = 4t + C \\ &\implies \log \left| \frac{2+x}{2-x} \right| = 4t + C \\ &\implies \frac{2+x}{2-x} = \pm e^{4t+C} \\ &\implies \frac{2+x}{2-x} = C e^{4t} \quad (\pm e^C \text{ を } C \text{ に置き換えた}) \end{aligned} \quad (\dagger\dagger)$$

に加えて、任意の  $C \in \mathbb{R}$  に対して  $\pm e^C \neq 0$  であることより、求める解は

$$\begin{cases} \text{(i)} & \frac{2+x}{2-x} = Ce^{4t}, \text{ すなわち, } x(t) = \frac{2(Ce^{4t}-1)}{1+Ce^{4t}} \quad (\text{ただし, } C \neq 0), \text{ あるいは,} \\ \text{(ii)} & \frac{2-x}{2+x} = Ce^{-4t}, \text{ すなわち, } x(t) = \frac{2(1-Ce^{-4t})}{1+Ce^{-4t}} \quad (\text{ただし, } C \neq 0). \end{cases}$$

ここで、(ii) にあらわれる定数  $C \neq 0$  は、(i) にあらわれる定数  $C$  を  $\frac{1}{C}$  と置き換えたものである。一方、以下の定数関数：

$$\begin{cases} \text{(i)}^* & x(t) = -2 \quad (\text{(i) 式に } C = 0 \text{ を代入した関数}), \\ \text{(ii)}^* & x(t) = 2 \quad (\text{(ii) 式に } C = 0 \text{ を代入した関数}). \end{cases}$$

も微分方程式  $x' = 4 - x^2$  の解である。したがって、求める一般解は

$$x(t) = \frac{2(Ce^{4t}-1)}{1+Ce^{4t}}, \text{ あるいは, } x(t) = \frac{2(1-Ce^{-4t})}{1+Ce^{-4t}}.$$

ただし、 $C$  は ( $C = 0$  の場合も含めた) 任意の定数である。

... (答)

**注意.** 初期条件を含まない微分方程式  $x' = 4 - x^2$  単独を解く場合は、その一般解を  $x(t) = \frac{2(Ce^{4t}-1)}{1+Ce^{4t}}$  あるいは  $x(t) = \frac{2(1-Ce^{-4t})}{1+Ce^{-4t}}$  のいずれか一つとしても構わない。

(3) 次の 2 つのステップに分けて、初期値問題 (\*\*) の解を得る。

**Step 1** (任意の定数  $C$  を用いた微分方程式  $x' = 4 - x^2$  の一般解の導出).

(2) より、微分方程式  $x' = 4 - x^2$  の一般解は

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{2(Ce^{4t}-1)}{1+Ce^{4t}}.}} \quad (\dagger\dagger)$$

ただし、 $C$  は任意の定数である。

**Step 2** (初期条件による  $C$  の決定).

初期条件  $x(0) = 1$  より、 $t = 0$  を (††) 式に代入すると、

$$1 = \frac{2(Ce^{4 \cdot 0} - 1)}{1 + Ce^{4 \cdot 0}}, \text{ すなわち, } 1 = \frac{2(C-1)}{1+C}$$

であり、方程式  $1 = \frac{2(C-1)}{1+C}$  を  $C$  について解くと、 $C = 3$ 。

Steps 1, 2 より、 $C = 3$  を (††) 式に代入することで、初期値問題 (†) の解は

$$x(t) = \frac{2(3e^{4t}-1)}{1+3e^{4t}}$$

である。

... (答)

**注意.** Step 1 において、微分方程式  $x' = 4 - x^2$  の一般解を

$$x(t) = \frac{2(1-Ce^{-4t})}{1+Ce^{-4t}}$$

と選んでも、初期条件  $x(0) = 1$  を満たす任意の定数  $C$  は  $C = \frac{1}{3}$  となることから、初期値問題 (†) の解は

$$x(t) = \frac{2(1-\frac{1}{3}e^{-4t})}{1+\frac{1}{3}e^{-4t}} \quad (\ddagger)$$

であり、(‡) 式の両辺に  $3e^{4t}$  をかけることで、 $x(t) = \frac{2(3e^{4t}-1)}{3e^{4t}+1}$  と書き直される。そのため、初期値問題 (†) の解はただ一つに定まる。