

微分方程式 レポート課題 2019/10/21(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 17:10-18:50)

自励系の平衡状態 (p.153-156)

定義. 次の微分方程式を考える.

$$x' = f(x) \quad (*)$$

定数関数 $x(t) = \bar{x}$ が $(*)$ の解であるとき, 解 $x(t) = \bar{x}$ を $(*)$ 式の平衡状態 (あるいは, $\bar{x}$ を $(*)$ 式の平衡点) という.

命題. 解 $x(t) = \bar{x}$ が $(*)$ 式の平衡状態であることと, $f(\bar{x}) = 0$ が成り立つことは互いに同値である.

例 5.7 (p.154-156)

(1) 【未知関数】 x : 放射線炭素 ^{14}C の濃度 【係数】 ① $r > 0$: 原子の生成量 ② $\lambda > 0$: 原子の崩壊率
次の微分方程式:

$$x' = -\lambda x + r$$

の平衡状態は $x(t) = \frac{r}{\lambda}$ である $\left(\because -\lambda \bar{x} + r = 0 \implies \bar{x} = \frac{r}{\lambda} \right)$.

(2) 【未知関数】 v : 物体の運動速度 【係数】 ① $\gamma > 0$: 比例定数 ② $m > 0$: 物体の質量 ③ $g = 9.806 \dots$: 重力加速度
次の微分方程式:

$$v' = -\frac{\gamma}{m}v + g$$

の平衡状態は $v(t) = \frac{mg}{\gamma}$ である $\left(\because -\frac{\gamma}{m}\bar{v} + g = 0 \implies \bar{v} = \frac{mg}{\gamma} \right)$.

注意. $\frac{mg}{\gamma}$ は物体の終端速度 (十分に時間が経過したときの一定速度) である.

(3) 【未知関数】 x : 人口の個体数 (密度) 【係数】 ① $r > 0$: 人口の増加率 ② $K > 0$: 環境収容定数
次の微分方程式:

$$x' = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right)$$

の平衡状態は $x(t) = 0, K$ の 2 つである $\left(\because r\bar{x} \left(1 - \frac{\bar{x}}{K} \right) = 0 \implies \bar{x} = 0, K \right)$.

1. 次の問いに答えよ. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

(1) 次の微分方程式の平衡状態 (あるいは平衡点) を求めよ. ただし, $K > 0$ である.

(例) $x' = 3x - 1$

(答) $3\bar{x} - 1 = 0$ を解くと, $\bar{x} = \frac{1}{3}$ となることから, 微分方程式 $x' = 3x - 1$ の平衡状態は $x = \frac{1}{3}$ である.

(i) $x' = x + 5$ (ii) $x' = x - 2x^3$ (iii) $x' = x(1 - e^{x-1})$

(2) 次の初期値問題:

$$\begin{cases} x' = x \left(1 - \frac{x}{K} \right), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (*)$$

の解 $x = x(t)$ を求め, $t \rightarrow +\infty$ としたの $x(t)$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ. ただし, $x_0 \geq 0$ である.

(3) 微分方程式 $x' = x \left(1 - \frac{x}{K} \right)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

注意. 結論を得るまでの途中式過程を必ず明記し, 読み手の立場に立ちながら 論述を行いましょう.