微分方程式 第 4 回レポート課題と解答

出題日：2019/10/21(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室，17:10-18:50)

1. 次の問いに答えよ．ただし，$' = \dfrac{d}{dt}$ である．

(1) 次の微分方程式の平衡状態（あるいは平衡点）を求めよ．ただし，$K > 0$ である．

$$\text{(i) } x' = x + 5 \qquad \text{(ii) } x' = x - 2x^3 \qquad \text{(iii) } x' = x(1 - e^{x-1})$$

解答 (概要). (i) $\overline{x} + 5 = 0 \iff \overline{x} = -5$ より，$x' = x + 5$ の平衡状態は $x = -5$ のみである． $\cdots$ (答)

(ii) $\overline{x} - 2\overline{x}^3 = 0 \iff \overline{x}(1 - 2\overline{x}^2) = 0 \iff \overline{x} = 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$x' = x - 2x^3$ の平衡状態は $x = 0,\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{あるいは } x = 0,\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の 3 つである． $\cdots$ (答)

(iii) $\overline{x}(1 - e^{\overline{x}-1}) = 0 \iff \overline{x} = 0, 1$ より，$x' = x(1 - e^{\overline{x}-1})$ の平衡状態は $x = 0,\ x = 1$ の 2 つである． $\cdots$ (答)

(2) 次の初期値問題：

$$\begin{cases} x' = x\left(1 - \dfrac{x}{K}\right), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

の解 $x = x(t)$ における $t \to +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ．ただし，$x_0 \geq 0$ である．

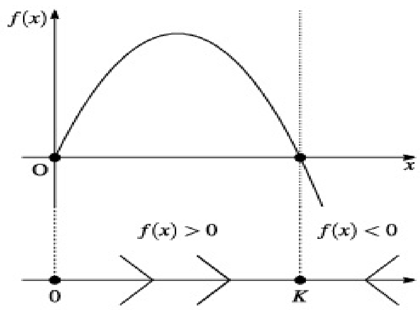
解答. はじめに，微分方程式 $x' = x\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ の平衡状態は $x = 0,\ x = K$ であることから，以下のことが成り立つ．

$$\text{(i) } x_0 = 0 \implies x(t) \equiv 0\ (t \geq 0) \text{ が成り立つことから，} \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \text{ である．}$$

$$\text{(ii)}_{=K}\ x_0 = K \implies x(t) \equiv K\ (t \geq 0) \text{ が成り立つことから，} \lim_{t \to +\infty} x(t) = K \text{ である．}$$

また，$f(x) = x\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ とおくと，微分方程式 $x' = f(x)$ に現れる関数 $f(x)$ の符号について，以下のことが成り立つ．

$$\text{(ii)}_{<\mathrm{K}}\ 0 \leq x < K \implies f(x) > 0 \ (\text{すなわち，} x' > 0) \qquad \text{(ii)}_{>\mathrm{K}}\ x > K \implies f(x) < 0 \ (\text{すなわち，} x' < 0)$$



ここで，初期値問題 $(*)$ の解 $x = x(t)$ における $t \to +\infty$ の極限について，$0 \leq x_0 < K$ ならば，$x(t)$ は増加傾向にあり，$x_0 > K$ ならば，$x(t)$ は減少傾向にある．以上より，次のことが成り立つ．

$$\text{(ii)}_{<\mathrm{K}}\ 0 \leq x_0 < K \implies \lim_{t \to +\infty} x(t) = K \qquad \text{(ii)}_{>\mathrm{K}}\ x_0 > K \implies \lim_{t \to +\infty} x(t) = K$$

したがって，(i) および $\text{(ii)}_{=K}$, $\text{(ii)}_{<K}$, $\text{(ii)}_{>K}$ より，初期値 x_0 の場合分けによる解 x の極限は次の通りにまとめられる．

$$\text{(i)}\ \ x_0 = 0 \implies \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \qquad \text{(ii)}\ \ x_0 > 0 \implies \lim_{t \to +\infty} x(t) = K \qquad \cdots \text{(答)}$$

(3) 微分方程式 $x' = x\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ．

解答. $f(x) = x\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ とおくと，$f(x) = x - \dfrac{x^2}{K}$ より，$\dfrac{df(x)}{dx} = 1 - \dfrac{2x}{K}$ である．さらに，微分方程式 $x' = f(x)$ の平衡状態 $x = 0,\ x = K$ における関数 $f(x)$ の微分係数 $\frac{df(x)}{dx}\big|_{x=0}$, $\frac{df(x)}{dx}\big|_{x=K}$ の符号にそれぞれ着目すると，

$$(a)\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0} = 1 - \frac{2 \cdot 0}{K} = 1 > 0 \qquad (b)\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=K} = 1 - \frac{2 \cdot K}{K} = -1 < 0$$

となることから，2 つの平衡状態 $x = 0,\ x = K$ の安定性は以下の通りにまとめられる．

(a) 平衡状態 $x = 0$ は不安定な平衡状態である． (b) 平衡状態 $x = K$ は安定な平衡状態である． $\cdots$ (答)