微分方程式　レポート課題　2019/10/28(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室，17:10-18:50)

1. 次の問いに答えよ．ただし，$' = \dfrac{d}{dt}$ である．

(1) 次の微分方程式の平衡状態（あるいは平衡点）を求めよ．ただし，$r, K > 0$ である．

(例) $x' = 3x^2 - 1$

(答) 微分方程式 $x' = 3x^2 - 1$ の平衡状態は $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(\text{平衡点は } \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ である．

$$\text{(i) } x' = 2x - 7 \qquad \text{(ii) } x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \qquad \text{(iii) } x' = x - 4x^3$$

(2) 微分方程式 $x' = f(x),\ f(x) = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ について，次の問に答えよ．ただし，$r, K > 0$ である．

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めよ．

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ．

(3) 微分方程式 $x' = f(x),\ f(x) = x - 4x^3$ について，次の問に答えよ．

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めよ．

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ．

注意.　結論を得るまでの途中式過程を必ず明記し，読み手の立場に立ちながら論述を行いましょう．

裏面：【研究 5.5，p.157】自励系 $x' = f(x)$ の平衡状態の安定性，補助資料

【研究 5.5，p.157】自励系 $x' = f(x)$ の平衡状態の安定性　　補助資料

$\boxed{\text{Step 1}}$ 関数 $f(x)$ の点 $x = a$ まわりでの Taylor 展開（2 章，p.55〜 ［$a = 0$: 1 章，p.35〜］）

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3 + \cdots \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right).$$

注意． $f^{(n)}$ は（f の n 乗ではなく）f の n 階導関数である．

例（$a = 0$）． (1) 例 1.1，p.40 : $f(x) = e^x$，(2) 例 1.4，p.42 : $f(x) = \sin x$

$$(1) \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \qquad \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \right)$$

$$(2) \quad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \qquad \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} \right)$$

$\boxed{\text{Step 2}}$ 非線形関数 $f(x)$ の線形関数（$ax + b$ の形）への近似

仮定． 微分方程式 $x' = f(x)$ の平衡状態は $x(t) = \overline{x}$ である．

Step 1 より，点 $x = \overline{x}$ まわりでの関数 $f(x)$ の Taylor 展開は，

$$f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x-\overline{x}) + \frac{1}{2}f''(\overline{x})(x-\overline{x})^2 + \frac{1}{6}f'''(\overline{x})(x-\overline{x})^3 + \cdots . \qquad (*)$$

上の仮定より，$f(\overline{x}) = 0$ であることから，

$$(*) \iff f(x) = f'(\overline{x})(x-\overline{x}) + \frac{1}{2}f''(\overline{x})(x-\overline{x})^2 + \frac{1}{6}f'''(\overline{x})(x-\overline{x})^3 + \cdots , \qquad (**)$$

すなわち，微分方程式 $x' = f(x)$ の右辺に $(**)$ 式を代入すると，

$$x' = f'(\overline{x})(x-\overline{x}) + \frac{1}{2}f''(\overline{x})(x-\overline{x})^2 + \frac{1}{6}f'''(\overline{x})(x-\overline{x})^3 + \cdots . \qquad (***)$$

ここで，$x - \overline{x}$ は微小な値をとるとして，2 次以上の項を（0 とみなして）無視すると，$(***)$ 式は

$$x' = f'(\overline{x})(x-\overline{x}) \qquad (\dagger)$$

と近似できる．

$\boxed{\text{Step 3}}$ f の近似によって得られた $(\dagger)$ 式の解の極限（漸近挙動）の分類

授業中に解説します．

Steps 1-3 より，元の微分方程式 $x' = f(x)$ の平衡状態 $x(t) = \overline{x}$ について，次の命題が成立する．

命題． 次のことが成り立つ．

(1) $f'(\overline{x}) > 0 \implies x' = f(x)$ の平衡状態 $x(t) = \overline{x}$ は不安定である．

(2) $f'(\overline{x}) < 0 \implies x' = f(x)$ の平衡状態 $x(t) = \overline{x}$ は安定である．

なお，$f'(\overline{x}) = 0$ のときは，安定性の判別は不能である（安定であることも不安定であることもある）．