微分方程式 第 5 回レポート課題と解答

出題日：2019/10/28(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室，17:10-18:50)

1. 次の問いに答えよ．ただし，$' = \dfrac{d}{dt}$ である．

(1) 次の微分方程式の平衡状態（あるいは平衡点）を求めよ．ただし，$r, K > 0$ である．

$$\text{(i)}\ x' = 2x - 7 \qquad \text{(ii)}\ x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \qquad \text{(iii)}\ x' = x - 4x^3$$

解答 (概要). (i) $2\overline{x} - 7 = 0 \iff \overline{x} = \dfrac{7}{2}$ より，微分方程式 $x' = 2x - 7$ の平衡状態は $x = \dfrac{7}{2}$ のみである． $\cdots$ (答)

(ii) $r\overline{x}(1 - \frac{\overline{x}}{K}) = 0 \iff \overline{x} = 0, K$ より，微分方程式 $x' = rx(1 - \frac{x}{K})$ の平衡状態は $x = 0,\ x = K$ の 2 つである． $\cdots$ (答)

(iii) $\overline{x} - 4\overline{x}^3 = 0 \iff \overline{x}(1 - 4\overline{x}^2) = 0 \iff \overline{x} = 0, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}$ より，微分方程式 $x' = x - 4x^3$ の平衡状態は $x = 0,\ x = \dfrac{1}{2},\ x = -\dfrac{1}{2}$ $\left(\text{あるいは } x = 0,\ x = \pm\dfrac{1}{2}\right)$ の 3 つである． $\cdots$ (答)

(2) 微分方程式 $x' = f(x),\ f(x) = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ について，次の問に答えよ．ただし，$r, K > 0$ である．

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めよ．

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ．

解答. (a) $f(x) = x - \dfrac{x^2}{K}$ より，$\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx} r\left(x - \dfrac{x^2}{K}\right) = r\left(1 - \dfrac{2x}{K}\right)$ である． $\cdots$ (答)

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の平衡状態 $x = 0,\ x = K$ における関数 $f(x)$ の微分係数の符号に着目すると，

$$\text{(i)}\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0} = r\left(1 - \frac{2 \cdot 0}{K}\right) = r > 0 \qquad \text{(ii)}\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=K} = r\left(1 - \frac{2 \cdot K}{K}\right) = -r < 0$$

となることから，2 つの平衡状態 $x = 0,\ x = K$ の安定性は以下の通りにまとめられる．

(i) 平衡状態 $x = 0$ は不安定な平衡状態である．
(ii) 平衡状態 $x = K$ は安定な平衡状態である． $\cdots$ (答)

(3) 微分方程式 $x' = f(x),\ f(x) = x - 4x^3$ について，次の問に答えよ．

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めよ．

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ．

解答. (a) $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x - 4x^3) = 1 - 12x^2$ である． $\cdots$ (答)

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の平衡状態 $x = 0,\ x = \dfrac{1}{2},\ x = -\dfrac{1}{2}$ における関数 $f(x)$ の微分係数の符号に着目すると，

$$\text{(i)}\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0} = 1 - 12 \cdot 0^2 = 1 > 0$$

$$\text{(ii)}\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}} = 1 - 12\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - 3 = -2 < 0$$

$$\text{(iii)}\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=-\frac{1}{2}} = 1 - 12\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - 3 = -2 < 0$$

となることから，3 つの平衡状態 $x = 0,\ x = \dfrac{1}{2},\ x = -\dfrac{1}{2}$ の安定性は以下の通りにまとめられる．

(i) 平衡状態 $x = 0$ は不安定な平衡状態である．
(ii) 平衡状態 $x = \dfrac{1}{2}$ は安定な平衡状態である．
(iii) 平衡状態 $x = -\dfrac{1}{2}$ は安定な平衡状態である． $\cdots$ (答)